

بررسی ارتعاشات غیرخطی بال با نسبت منظری بالا

حسین گل پرور، مجید پورقاسم

هیوا کازی^۱

مجدید پورقاسم^۲

حسین گل پرور^۱

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مرکز تحقیقات آیرودینامیک قدر

مرکز تحقیقات آیرودینامیک قدر

دانشگاه جامع امام حسین (ع)

دانشگاه جامع امام حسین (ع)

(تاریخ دریافت: // تاریخ پذیرش: //)

چکیده

تحلیل ارتعاشات غیرخطی با استفاده از مدهای نرمال غیرخطی در یک سیستم چند درجه آزادی می تواند یک راه حل جامع برای تحلیل دینامیکی سازه های غیرخطی باشد. از طرفی چون تحلیل های خطی قادر به استخراج جوابی دقیق و مناسبی از یک مدل غیرخطی نیستند به همین دلیل استفاده از روش های غیرخطی بیشتر مورد توجه قرار می گیرد. در این مقاله ارتعاشات غیرخطی بال با نسبت منظری بالا مورد مطالعه قرار می گیرد. از این رو در ابتدا بال با نسبت منظری بالا به صورت دو بعد و در قالب تیر یک سر گیردار فلزی همگن در نظر گرفته می شود و سپس معادلات دیفرانسیل ارتعاشی حاصل از خمش غیرخطی و پیچش غیرخطی این نمونه با استفاده از روابط موجود در آنالیز مودال خطی به فضای مودال برده می شود و در انتها با استفاده از روش های تحلیلی و نیمه تحلیلی موجود در منیفولد ثابت ارتعاشات غیرخطی حاصل از خمش و پیچش برای این دسته از معادلات ارتعاشی استخراج می گردد و نتایج هر سه روش در سه مود اول خمش غیرخطی و پیچش غیرخطی مورد مقایسه و بررسی قرار می گیرد. این رو خاطر نشان باید کرد که در تحلیل ارتعاشات غیرخطی با استفاده از روش تحلیلی منیفولد ثابت فرض می شود که حرکات درجات آزادی بعضی از نقاط سیستم تابعی از حرکات درجات آزادی بعضی از نقاط دیگر سیستم هستند که این فرض منجر به مورد کاهش قرار گرفتن دسته معادلات دیفرانسیل حرکت می شود.

واژه های کلیدی: منیفولد ثابت، تحلیل مودال، ارتعاشات غیرخطی، نوسانات غیرخطی، مدهای نرمال غیرخطی، دینامیک سازه، سیستم

غیرخطی، مدل کاهش داده شده، سیستم پیوسته، تیر یک سر گیردار فلزی همگن

Study Of Nonlinear Oscillations Of High Aspect Ratio Wing

Hossein Golparvar

Majid Pourghasem

Hiwa Qazi

Ghadr Aerodynamics
Research Center
Imam Hossein
University

Ghadr Aerodynamics
Research Center
Imam Hossein
University

Amir kabir university of
Technology

(Received:; Accepted:)

ABSTRACT

Nonlinear Oscillations Analysis Of Multi Degree Of Freedom System With Using Nonlinear Normal Modes Can Be General Method For Nonlinear Structural Dynamics Analysis whereas Linera Methods Can Not Be A Good Method For Analysing Of Nonlinear Models Hence Nonlinear Methods Will Be More Considered Therefore in This Paper Nonlinear Bending And Torsional Vibrations Of High Aspect Ratio Wing Will Be Analysed With Using Invariant Manifold Hence To Simplify And Analysis The Wing Model Will Be Considered as a Metallic Double Cantilever Beam In Two Dimensional Space. Next The Equations Of These Model Will Be transferred To Modal Space With Using Linear Modal Analysis Relations. Finally Invariant Manifold Method Will Be Implemented To Generate Resluts Of Nonlinear Oscillation. In Deed It Is Assumed in Invariant Manifold Method That Some Degrees Of Freedom Can Be Funcions Of one or more Specific Degree Of freedoms .

Keywords: invariant Manifold, Modal Analysis , Nonlinear Vibrations , Nonlinear Oscillations , Nonlinear Normal Modes , Structural Dynamics , Nonlinear Sytem , Reduced Order Model , Continuous System

۱- مرتبه علمی (نویسنده پاسخگو): مربی

۲- مرتبه علمی: مربی

۲- مرتبه علمی: مربی

۱- مقدمه

هدف اصلی این مقاله بررسی ارتعاشات غیرخطی بال با نسبت منظری بالا به روش منیفولد ثابت می باشد. نقطه شروع معمولاً مدل غیرخطی از مودال یا تحلیل روش اجزا می باشد که دینامیکشان توسط معادلات حرکت به فرم مختصات مودال خطی بیان می شود. اولین هدف از این مقاله استفاده معرفی روش های تحلیلی و نیمه تحلیلی موجود در منیفولد ثابت برای حل سیستم های پیوسته می باشد. سپس بال با نسبت منظری بالا در محیط دو بعد به صورت تیر غیرخطی یک سرگیردار فلزی همگن فرض می شود. در سپس اینکه مدل تیر غیرخطی کاهش داده شده بر پایه روش منیفولد ثابت برای تحلیل مودال فراهم می شود. در آخر هم با استفاده از روش های معرفی شده اقدام به استخراج نتایج مربوط به سه مود اول خمشی و پیچشی می شود.

براساس دیدگاه های روزنبرگ و شاو و پیر دو تعریف اصلی برای مود نرمال غیرخطی در مطالب وجود دارد. همچنین تعاریف اضافی تری هم وجود دارد که شامل فرمول منیفولد ثابت مقدار مختلط می باشد که در این مقاله توصیف نشدند. **تعریف روزنبرگ**: در حین حرکت مود یک سیستم خطی پایستار هر جز سیستم با یک فرکانس یکسان و نسبت ثابت بین جابجایی اعضا حرکت می کند. با در نظر گرفتن تعمیم مفهوم غیرخطی مودهای نرمال خطی، روزنبرگ مودهای نرمال غیرخطی رو ارتعاش هماهنگ یک سیستم (نوسان های هماهنگ) تعریف نمود. این تعریف بیانگر این بود که همه نقاط سیستم همزمان از نقاط بیشینه و نقاط صفر مورد نظر خود عبور می کنند و همه جابجایی ها بر حسب عبارت جابجایی مرجع منفرد بیان شوند. روزنبرگ خطوط مودال سیستم غیرخطی رو که خمیده بود غیرمشابه نامید [۸ و ۷].

تعریف شاو و پیر: شاو و پیر تعریف روزنبرگ را که بیانگر تعمیم مستقیم و خوب از مفهوم مودهای نرمال غیرخطی برای سیستم های مستهلک شونده بود را توسعه دادند. آن دو منیفولد را که از روش منیفولد مرکزی الهام گرفته بودند را در یک حرکت ارتعاشی ثابت فرض نمودند (مدارهایی که روی منیفولد شروع شده و در طول زمان روی منیفولد ثابت باقی می ماند). به طوری که خواص ثابت مودهای نرمال خطی را به سیستم های غیرخطی توسعه می دهد. برای پارامتری کردن منیفولد یک جفت متغیر حالت (شامل متغیر جابجایی و متغیر سرعت) به عنوان مختصات اصلی انتخاب می شود و باقی متغیرها تابع این جفت متغیر می شوند. بنابراین سیستم شبیه سیستم ۱ درجه آزادی غیرخطی روی منیفولد تولید می شود.

از نظر هندسی مودهای نرمال غیرخطی توسط صفحاتی در فضای فازی هستند ارائه می شوند که سطوح ۲ بعدی بوده و مماس بر نقاط تعادل متناظر خود می باشند. مودهای نرمال غیرخطی دارای خواص هستند که به صورت پایه از مودهای نرمال خطی متفاوت می شوند.

وابستگی فرکانس-انرژی: یکی از ویژگی های دینامیکی سیستم های غیرخطی وابستگی انرژی-فرکانس نوسان هایشان می باشد. یعنی این که تابع پاسخ فرکانسی سیستم های غیرخطی بعد از مدت زمانی دیگر ثابت نخواهند بود. **تقابل مودال** - **تشدید داخلی مودهای نرمال غیرخطی**: یکی دیگر از ویژگی های برجسته سیستم های غیرخطی تقابل مودهای نرمال غیرخطی با حرکت عمومی سیستم می باشد که می توان برای درک بیشتر این مطلب به این مرجع مراجعه نمود. مورد دیگری تغییر انرژی بین مودهای متفاوت درگیر عوض می شود در حین تشدید داخلی می باشد.

دوشاخگی مودال و پایداری: سومین خواص پایه ای مودهای نرمال غیرخطی این است که تعداد هایشان ممکن است از تعداد درجات آزادی سیستم بیشتر باشد. یکی دیگر از ویژگی های مهم مودهای نرمال غیرخطی این است که می توانند پایدار یا ناپایدار باشند که برخلاف تئوری خطی می باشد که همه مودها به طور خنثی پایدار هستند. در این حوزه ناپایداری بدین معنی است که کوچک ترین اغتشاش در شرایط اولیه منجر به حذف نوسانات مودهای نرمال غیرخطی می شود. روش های تحلیلی هم شامل موارد زیر می باشد:

فرمول بندی پایه - انرژی: که به کار روزنبرگ مرتبط می باشد. **روش منیفولد ثابت**: مشابه روش قبل یعنی روش پایه - انرژی است که دستگاه معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم را کاهش مرتبه می کند و با استفاده از این دیدگاه مسئله را مورد بررسی قرار می دهد. در سال ۲۰۱۰ میلادی هم کریستوفر ویات اموری و همکارانش [۹] توانستند با استفاده از این روش نوسانات سیکل حدی را در یک سیستم آیرولاستیک پیش بینی و محاسبه کنند. و همچنین جیانگ در سال ۲۰۰۴ با استفاده از روش منیفولد ثابت به بررسی سیستم های دارای ارتعاشات اجباری [۱۰] پرداخت.

روش مقیاس های چندگانه: یکی از روش های اغتشاشیکه اخیراً مورد توجه قرار گرفته است روش مقیاس های چندگانه می باشد. که معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم را به طور مستقیم حل می کرد [۱۱ و ۱۲ و ۱۳].

$$-\omega_k^2 X_{ik} - f_i(u_k) = \frac{\partial X_{ik}}{\partial u_k} v_k + \frac{\partial X_{ik}}{\partial v_k} (-\omega_k^2 u_k - f_k(u_k))$$

از طرفی چون حل دقیق دسته معادله (۹) ندارد پس باید حل تقریبی برای آن در نظر بگیریم از طرفی چون سیستم رو پایستار و غیرژیروسکوپی فرض شده است پس می توان حل تقریبی را به صورت زیر حدس زد :

$$X_{ik}(u_k, v_k) = a_{1ik} u_k + a_{3ik} u_k^2 + a_{5ik} v_k^2 + a_{6ik} u_k^3 + a_{8ik} u_k v_k^2 + \dots \quad (10)$$

$$Y_{ik}(u_k, v_k) = b_{2ik} v_k + b_{4ik} u_k^2 + b_{7ik} v_k^2 + b_{9ik} u_k^3 + \dots$$

حال با جای گذاری رابطه (۱۰) در (۹) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب u_k , v_k , .. دسته معادلات جبری غیرخطی بوجود می آید که با حل آنها ضرائب a ها و b ها بدست می آید. شکل مودهای غیرخطی توسط معادله (۳) با جایگزاری η_i ها با نسخه مودال متناظرش یعنی X_i پس k امین مود نرمال غیرخطی داده شده در میدان جابجایی به صورت زیر می باشد :

$$w_k(s, t) \quad (11)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(s) X_{ik}(t) = \varphi_k(s) u_k(t) + \sum_{i=1, i \neq k}^{\infty} \varphi_i(s) (a_{3ik} u_k(t)^2 + a_{5ik} v_k(t)^2 + a_{6ik} u_k(t)^3 + a_{8ik} u_k(t) v_k(t)^2 + \dots)$$

همچنین باید توجه داشت که u_k و v_k بیانگر جابجایی و سرعت k امین دامنه مودال خطی در حین حرکت k امین مود نرمال غیرخطی می باشد. بنابراین شکل مود را می توان با فرض $v_k(t) = 0$ رسم نمود. از این رو برای بدست آوردن دینامیک مودال با جای گذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۹) ، رابطه زیر حاصل می شود :

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k + \alpha_k u_k^2 + \beta_k u_k^3 + \gamma_k u_k \dot{u}_k^2 + \dots = 0, \quad (12)$$

که در آن α_k و β_k و γ_k ضرائب ثابت می باشند. که از حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی بر حسب ضرائب مجهول بدست می آیند.

روش سراسری گالرکین (دامنه مودال و زاویه فاز) : [۴] : اگر

رابطه (۷) را به صورت رابطه (۱۳) تعریف شود:

$$\eta_i = X_i(\eta_k, \dot{\eta}_k) \quad (13)$$

$$\dot{\eta}_i = Y_i(\eta_k, \dot{\eta}_k)$$

می توان مختصات مبنا را با استفاده از تبدیل مختصات زیر از فضای جابجایی و سرعت مودال به دامنه مودال و زاویه فاز تبدیل نمود :

۲- معرفی روش های موجود در منیفولد ثابت

روش مجانبی [۲] : اگر ارتعاشات یک بعدی یک سیستم پیوسته یک بعدی را که در ناحیه $s \in (0,1)$ تعریف شده است را در نظر گرفته شود می توان معادلات حرکت آن را به صورت زیر نوشت :

$$\frac{\partial^2 w(s, t)}{\partial t^2} + L(w(s, t)) + N(w(s, t)) = 0 \quad (1)$$

با شرایط مرزی خطی در نقاط $s=0$ و $s=1$

$$B_1(w(s, t))_{s=0} = 0, B_2(w(s, t))_{s=1} = 0 \quad (2)$$

پس از جای گذاری رابطه (۳) در رابطه (۲) به رابطه (۴) می توان دست پیدا کرد.

$$w(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(s) \eta_j(t) \quad (3)$$

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) + f_i(\eta(t)) = 0, i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

که η بردار نامتناهی بعدی که متشکل از η_i هاست و ترمهای کوچک شده غیرخطی در f_i به صورت زیر مشخص می شود:

$$f_i(q(t)) = \langle \varphi_i(s), N(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(s) \eta_j(t)) \rangle, i = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

بدین منظور برای مشخص کردن مود نرمال غیرخطی به صورت منیفولد ثابت به واسطه روش توسعه یافته در مرجع [۳] این معادلات حرکت به فرم مرتبه اول نوشته می شوند:

$$\dot{\eta}_i(t) = Y_i(t), \quad (6)$$

$$\dot{Y}_i(t) = -\omega_i^2 \eta_i(t) - f_i(\eta(t)), i = 1, 2, 3, \dots$$

همچنین فرض میکنیم $\frac{\omega_i}{\omega_j}$ زمانی که $i \neq j$ مساوی عددی صحیحی نباشد. حال با تعریف $(u_k, v_k) = (\eta_k, \dot{\eta}_k)$ فرض میکنیم مود نرمال وجود داشته باشد و به فرم زیر مرتب می شود ($i=1, 2, 3, \dots$)

$$\eta_i(t) = X_{ik}(u_k(t), v_k(t)) \quad (7)$$

$$\dot{\eta}_i(t) = Y_{ik}(u_k(t), v_k(t))$$

پس می توان گفت دینامیک کل سیستم توسط دینامیک k امین دامنه و سرعت مودال خطی مشخص می شود. حال با گرفتن مشتق زمانی از معادله (۷) داریم :

$$\dot{X}_i = \frac{\partial X_{ik}}{\partial u_k} \dot{u}_k + \frac{\partial X_{ik}}{\partial v_k} \dot{v}_k \quad (8)$$

$$\dot{Y}_i = \frac{\partial Y_{ik}}{\partial u_k} \dot{u}_k + \frac{\partial Y_{ik}}{\partial v_k} \dot{v}_k$$

حال با جای گذاری معادله (۶) مقادیر $\dot{u}_k$ و $\dot{v}_k$ در معادله (۸) داریم :

$$Y_{ik} = \frac{\partial X_{ik}}{\partial u_k} v_k + \frac{\partial X_{ik}}{\partial v_k} (-\omega_k^2 u_k - f_k(u_k)) \quad (9)$$

جایگزاری می شود و سپس دو معادله رابطه (۱۹) در a ضرب می شود تا تکین بودن در نقطه a رفع شود. در آخر تمامی جملات به سمت راست تساوی معادلات برده می شود و تصویرسازی گالریکین [۵] با استفاده از توابع شکل منفرد روی آن بازه ها صورت می گیرد و دسته معادلات زیر را بوجود می آورد:

$$\begin{aligned} & \int_{a,\varphi} U_{p,q} [-a \sum_{l,m} D_{i,l,m} U_{l,m} \\ & + \sum_{l,m} C_{i,l,m} \frac{\partial T_{l,m}}{\partial a} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} \right. \\ & \left. - 2\zeta_k \omega_k \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi) \\ & + \sum_{l,m} C_{i,l,m} \frac{\partial T_{l,m}}{\partial \varphi} [a\omega_k - \left(\frac{f_k}{\omega_k} \right. \\ & \left. + 2\zeta_k \omega_k a^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \right)] da d\varphi \\ & \int_{a,\varphi} T_{p,q} [2\zeta_i \omega_i a \sum_{l,m} D_{i,l,m} U_{l,m} \\ & + \omega_i^2 a \sum_{l,m} C_{i,l,m} T_{l,m} - a f_i \\ & + \sum_{l,m} D_{i,l,m} \frac{\partial U_{l,m}}{\partial a} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} \right. \\ & \left. - 2\zeta_k \omega_k \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi) \\ & + \sum_{l,m} D_{i,l,m} \frac{\partial U_{l,m}}{\partial \varphi} [a\omega_k - \left(\frac{f_k}{\omega_k} \right. \\ & \left. + 2\zeta_k \omega_k a^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \right)] da d\varphi \end{aligned} \quad (21)$$

که $i=1 \dots N$ و $i \neq k$ و $p=1 \dots N_a$ و $q=1 \dots N_\varphi$ می باشد. دسته معادلات (۲۱) بیانگر تعداد $2(N-1)N_a N_\varphi$ معادله در C و D ها می باشد سپس با انتگرال گیری از دسته معادلات (۲۱) به دسته معادلات جبری غیرخطی می توان دست پیدا کرد که باید از روش های موجود برای حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی استفاده کرد.

روش سراسری گالریکین (جابجائی مودال و سرعت مودال) [۵]: برای این کار دامنه های $u_k \in [-U_b, U_b]$ و $v_k \in [-V_b, V_b]$ برای حدس جواب های تقریبی در نظر گرفته می شود. برای این کار X_i و Y_i مطابق زیر که تابعی از u_k و v_k فرض می شود:

$$X_i(u_k, v_k) = \sum_{l=1}^{N_{p,u}} \sum_{m=1}^{N_{p,v}} C_{i,l,m} LM_{l,m}(u_k, v_k) \quad (22)$$

$$Y_i(u_k, v_k) = \sum_{l=1}^{N_{p,u}} \sum_{m=1}^{N_{p,v}} D_{i,l,m} LM_{l,m}(u_k, v_k)$$

که $i=1,2,3, \dots, N, i \neq k$ و $D_{i,l,m}$ ضرایب مجهول و $LM_{l,m}(u_k, v_k)$ توابع پایه معلوم و دو بعدی بر حسب u_k, v_k می باشند به طوری که $LM_{l,m}(0,0) = 0$ و $\frac{\partial LM_{l,m}}{\partial u_k}(0,0) = 0$ می باشد که نشان می دهد منیفولد ثابت از مبدا $(u_k, v_k) = (0,0)$ (نقطه حالت تعادل) می گذرد و مماس

$$\eta_k = a \cos(\varphi) \quad (14)$$

$$\dot{\eta}_k = -a\omega_k \sin(\varphi)$$

بنابراین رابطه (۱۳) را می توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\eta_i = P_i(a, \varphi) \quad (15)$$

$$\dot{\eta}_i = Q_i(a, \varphi)$$

که در آن $i=1 \dots N, i \neq k$ می باشد. همچنین معادله اصلی حرکت حاکم بر η_k به معادله مرتبه اول زیر تبدیل می شود:

$$\dot{a} = \left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi) \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_k - \left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin(\varphi) \right) \cos(\varphi)$$

و معادله دیفرانسیل حرکت باقی نقاط را می توان به فرم مرتبه اول زیر نوشت:

$$\dot{P}_i(a, \varphi) = Q_i(a, \varphi) \quad (17)$$

$$\dot{Q}_i(a, \varphi) = -2\zeta_i \omega_i Q_i(a, \varphi) - \omega_i^2 P_i(a, \varphi) + f_i$$

با گرفتن مشتق زمانی از طرف چپ معادله (۱۷) با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم:

$$\dot{P}_i(a, \varphi) = \frac{\partial P_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial P_i}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \quad (18)$$

$$\dot{Q}_i(a, \varphi) = \frac{\partial Q_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial Q_i}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

با جای گزاری رابطه (۱۸) در رابطه (۱۷) دسته معادلات

دیفرانسیل جزئی مستقل از زمان و حاکم بر هندسه منیفولد

حاصل می شود:

$$Q_i = \frac{\partial P_i}{\partial a} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi) \quad (19)$$

$$+ \frac{\partial P_i}{\partial \varphi} \left[\omega_k - \left(\frac{f_k}{a\omega_k} + 2\zeta_k \omega_k a \sin(\varphi) \right) \cos(\varphi) \right]$$

$$- 2\zeta_i \omega_i Q_i - \omega_i^2 P_i + f_i = \frac{\partial Q_i}{\partial a} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} \right.$$

$$\left. - 2\zeta_k \omega_k a \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi)$$

$$+ \frac{\partial Q_i}{\partial \varphi} \left[\omega_k - \left(\frac{f_k}{a\omega_k} \right.$$

$$\left. + 2\zeta_k \omega_k a \sin(\varphi) \right) \cos(\varphi) \right]$$

سپس روابط قیدی جابجایی و سرعت نامعلوم را به صورت توابع

از a و Φ حدس زده می شود:

$$P_i(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_{i,l,m} T_{l,m}(a, \varphi) \quad (20)$$

$$Q_i(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} D_{i,l,m} U_{l,m}(a, \varphi)$$

که C و D ضرایب نامشخص و $T_{l,m}$ و $U_{l,m}$ توابع شکل مشخص

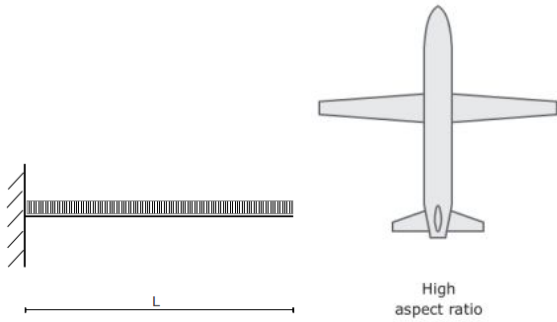
هستند که به صورت مرسوم متشکل از حاصل ضرب توابعی از a

و Φ می باشند و در بازه های $a \in [0, a_0]$ و $\varphi \in [0, 2\pi]$ تعریف

می شوند و N_a و N_φ تعداد توابع مورد استفاده در a و Φ می باشد.

این توابع در معادلات هندسه منیفولد یعنی رابطه (۱۹)

اگر شکل تیر غیرخطی یک سرگیردار فلزی همگن مورد نظر به صورت زیر در نظر گرفته شود :



شکل (۱): تیر یک سرگیردار چپ : دوبعد- راست : سه بعد در ابتدا با استفاده از مراجع [۳ و ۴] می توان دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی که بیانگر معادلات ارتعاشاتی کوپل عرضی- پیچشی تیر غیرخطی فلزی همگن با شرایط مرزی یک سرگیردار-یک سر آزاد است را به صورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned} m\ddot{w} - I_\varepsilon \ddot{w}'' - m\ddot{\theta} + D_\varepsilon w'''' & \quad (26) \\ = I_\varepsilon (w'(w'\dot{w}')\dot{\theta})' - I_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [(\dot{w}'\theta^2)'] \\ + D_\varepsilon (w''\theta^2)'' - D_\varepsilon (w'(w'w'')\dot{\theta})' \\ - \frac{m}{2} \left(w' \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^x (w')^2 dx \right] dx \right)' \\ - m\dot{\theta}(\dot{w}' + \dot{\theta}w'\dot{w}') \\ - m\dot{\theta} \left(\frac{\dot{\theta}(\dot{w}')^2}{2} + \dot{\theta}w'\dot{w}' + \frac{\dot{\theta}(\theta)^2}{2} \right) \\ I_\eta \ddot{\theta} - D_\eta \ddot{\theta}'' - m\ddot{w} \\ = -\frac{1}{2} m\dot{\theta} ((w')^2 \\ + \theta^2) \ddot{w} - I_\varepsilon (\dot{\theta}w')^2 \\ + D_\varepsilon (\dot{\theta}w'')^2 \end{aligned}$$

که در آن w جابجائی عرضی تیر برحسب متر و θ دوران حول محور x برحسب رادیان می باشد و t متغیر زمان L طول تیر در راستای محور، I ممان اینرسی خمشی ، I_η ممان اینرسی قطبی ، e فاصله مرکز هندسی جسم از مرکز برش جسم و D_ε معادل EI سختی خمشی و D_η معادل GJ سختی و m جرم تیرمی باشد .

رابطه (۲۷) که جداسازی متغیرها می باشد که در آن ϕ_j شکل مود خطی پیچشی تیر یک سرگیردار و ψ_j شکل مود خطی خمشی تیر یک سرگیردار در مود j ام مورد نظر و a_j

بر فضای ویژه ۲ بعدی در آن نقطه می باشد. و با جایگزینی رابطه (۲۲) در رابطه (۹) و هریک از معادلات تشکیل شده در (۹) را در تابع پایه با استفاده از ضرب داخلی روی کل دامنه ضرب می شود و در آخر به رابطه زیر ختم منتهی می شود :

$$\begin{aligned} \int_{u_k, v_k} \left(\frac{1}{U_b} \right) \left(\frac{1}{V_b} \right) LM_{p,q} \left[- \sum_{(l+m) \neq 2,3} D_{i,l,m} LM_{l,m} \right. & \quad (23) \\ + \sum_{(l+m) \neq 2,3} C_{i,l,m} v_k \frac{\partial LM_{l,m}}{\partial u_k} \\ + \sum_{(l+m) \neq 2,3} C_{i,l,m} \frac{\partial LM_{l,m}}{\partial v_k} (-\omega_k^2 u_k \\ + f_k) \Big] du_k dv_k \equiv F_i^{Y,pq} \\ \int_{u_k, v_k} \left(\frac{1}{U_b} \right) \left(\frac{1}{V_b} \right) LM_{p,q} \left[\omega_i^2 \sum_{(l+m) \neq 2,3} C_{i,l,m} LM_{l,m} \right. \\ \pm f_i + \sum_{(l+m) \neq 2,3} D_{i,l,m} v_k \frac{\partial LM_{l,m}}{\partial u_k} \\ + \sum_{(l+m) \neq 2,3} D_{i,l,m} \frac{\partial LM_{l,m}}{\partial v_k} (-\omega_k^2 u_k \\ + f_k) \Big] du_k dv_k \equiv F_i^{X,pq} \end{aligned}$$

که $q = p = 1, \dots, N_{p,u}$ و $i = 1, 2, 3, \dots, N, i \neq k$ و $1, \dots, N_{p,v}$ می باشد. همچنین معادلات (۲۳) بیانگر تعداد $2(Q-1)(N_{p,u}N_{p,v}-3)$ معادلات جبری غیرخطی در C و D می باشد.

حال برای دو مثال پیش رو توابع پایه برای روش سراسری گالرکین دامنه و فاز به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} T_{l,m}(a, \varphi) &= L_l(a) \cos((m-1)\varphi) \\ U_{l,m}(a, \varphi) &= L_l(a) \sin(m\varphi) \end{aligned} \quad (24)$$

و برای روش سراسری گالرکین جابجائی و سرعت توابع پایه ذیل را در نظر گرفته می شوند :

$$\begin{aligned} L &= \left\{ 1, \left(\frac{u_k}{U_b} \right), \left(\frac{u_k}{U_b} \right)^2, \left(\frac{u_k}{U_b} \right)^3, \dots, \left(\frac{u_k}{U_b} \right)^{l-1}, \dots \right\} \\ M &= \left\{ 1, \left(\frac{v_k}{V_b} \right), \left(\frac{v_k}{V_b} \right)^2, \left(\frac{v_k}{V_b} \right)^3, \dots, \left(\frac{v_k}{V_b} \right)^{m-1}, \dots \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

۳- بال با نسبت منظری بالا (تیرفلزی غیرخطی یک سرگیردار) :

در این قسمت سه روش اشاره شده در منیفولد ثابت که در بخش قبل معرفی گردیدند برای تیر غیرخطی فلزی همگن با شرایط تکیه گاهی یک سرگیردار-یک سر آزاد (که رفتاری مشابه با بال هواپیما با نسبت منظری بالا در محیط ۲-بعدی می باشد) پیاده سازی می شود و سپس هر سه نتایج استخراج شده از هر سه روش مذکور با هم مقایسه می شوند.

$$\begin{aligned}
 D_\varepsilon w'' + m \left(1 - \frac{me^2}{I_\eta} \right) \ddot{w} - I_\varepsilon \ddot{w}'' & \quad (30) \\
 = \frac{meD_\eta}{I_\eta} \theta'' - \frac{meI_\varepsilon}{I_\eta} (\theta \dot{w}')^2 \\
 + \frac{me}{I_\eta} D_\varepsilon (\theta w'')^2 + I_\varepsilon (w' (w' \dot{w}'))' \\
 - I_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [(\dot{w}' \theta^2)] + D_\varepsilon (w'' \theta^2)'' \\
 - D_\varepsilon (w' (w' w''))' \\
 - \frac{m}{2} \left(w' \int_l^x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^x (w')^2 dx \right] dx \right)'
 \end{aligned}$$

سپس با جایگزاری (۲۶) در (۳۰) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
 \ddot{c}_j + \frac{D_\varepsilon (\lambda_j)^4}{[m \left(1 - \frac{me^2}{I_\eta} \right) + I_\varepsilon (\lambda_j)^2]} c_j & \quad (31) \\
 = \frac{f_j}{[m \left(1 - \frac{me^2}{I_\eta} \right) + I_\varepsilon (\lambda_j)^2]}
 \end{aligned}$$

که در آن f_j ترم های غیرخطی ناشی از دمپینگ ژيروسکوپ و خمش و پیچش غیرخطی می باشد که به دلیل زیاد بودن عبارت های آن از آوردن در این مقاله صرفنظر شده است. در ضمن $j=1, \dots, N_b + N_t$ که N_b و N_t تعداد مودهای مورد استفاده در راستای پیچش و خمش می باشد. **سوم:** همچنین برای مرتبط کردن دسته معادلات در فضای مودال ترمهای غیرخطی $\ddot{c}_k, \dot{c}_i, \ddot{c}_i$ طرف راست معادله (۵.۳) در نظر گرفته نمی شود.

همانطور که پیش تر اشاره شد با جداسازی کردن معادله دیفرانسیل و تبدیل آن به یک دسته معادله تحلیل مسئله از دیدگاه روش های مجانبی و گالربین فراهم می شود. قبل از هرچیز باید این رو خاطر نشان ساخت که شرایط فیزیکی مسئله را به صورت زیر فرض شده است:

$$\begin{aligned}
 m = 29.475, D_\eta = 7.639377266 \times 10^8, E \\
 = 2 \times 10^{11}, I_\varepsilon = 5 \times 10^{-8}, L \\
 = 1.5 \\
 \lambda_j = \frac{(2j-1)}{2L} \pi, \beta_j = \frac{(2j+1)}{2L} \pi, I_\eta = \\
 29.3822, D_\varepsilon = 10000, e=0.0029718
 \end{aligned}$$

۴- نتایج استخراج شده از مود اول

این بخش شامل ارائه نتایج بدست آمده از مود اول می باشد. باید در نظر داشت که برای این مسئله سه مود اول خمشی و سه مود اول پیچشی مورد بررسی قرار گرفته است که

و c_j, j امین درجه آزادی پیچشی و عرضی مختصات مودال می باشد.

$$\begin{aligned}
 \theta(x, t) &= \sum_{j=1}^{N_t} \phi_j(x) a_j(t), w(x, t) \\
 &= \sum_{j=1}^{N_b} \psi_j(x) c_j(t)
 \end{aligned}
 \quad (27)$$

که با جایگذاری در رابطه (۲۶) و با استفاده از شرط تعادل مودهای نرمال خطی دسته معادلات دیفرانسیل غیرخطی زیر که برحسب مختصات مودال است حاصل می شود. با این کار عملاً معادلات ارتعاشاتی کوپل حاکم بر روی تیر مورد نظر جداسازی^۱ می شود و شرایط را برای پیاده سازی روش های موجود در منیفولد ثابت بر روی سیستم مورد نظر را فراهم می کند. اما قبل از جای گذاری می توان فرضیات پیش رو را در نظر گرفت:

اول: به خاطر تاثیر پذیری کمتر me ، می توان عبارت های موجود شامل me در قسمت غیرخطی از معادله اصلی حرکت (۲۶) (طرف راست هر دو معادله اصلی) را حذف نمود:

$$me(\theta \dot{w} + \dot{\theta} w' \dot{w})' \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 &= 0, me \left(\frac{\theta (\dot{w}')^2}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \theta w' \dot{w}' + \frac{\dot{\theta} (\theta)^2}{2} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

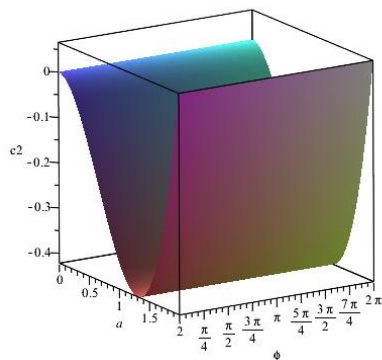
$$, -\frac{1}{2} me ((w')^2 + \theta^2) \ddot{w} = 0$$

دوم: پس می توان معادله دوم (۲۶) را به صورت زیر نوشت:

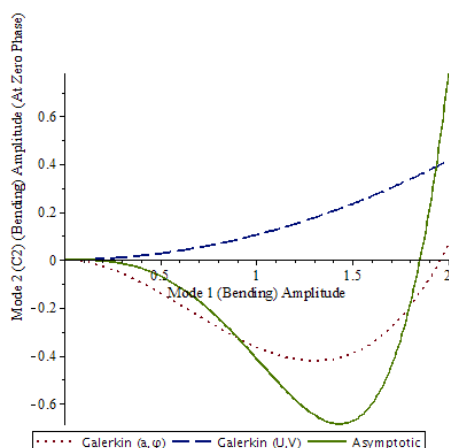
$$\ddot{\theta} = \frac{D_\eta \theta'' + me \ddot{w} - I_\varepsilon (\theta \dot{w}')^2 + D_\varepsilon (\theta w'')^2}{I_\eta} \quad (29)$$

با جایگزاری رابطه (۲۹) در (۲۶) می توان نوشت:

¹ Discretizing



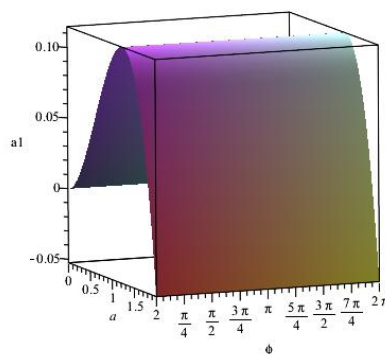
شکل (۳): مود اول منیفولد ثابت : جابجائی مود دوم خمشی. در شکل (۴) هم منحنی جابجائی مود خطی (درجه آزادی دوم مودال) برحسب دامنه مود اول غیرخطی جابجائی عرضی را نشان می دهد. که بیانگر وابسته بودن جابجائی عرضی به دامنه مود اول غیرخطی جابجائی عرضی می باشد و همچنین خم بودن منحنی نشان دهنده غیرخطی بودن جابجائی مود دوم خطی می باشد. باید توجه داشت که هر سه نمودار به ازای $\Phi = 0$ رسم شده اند.



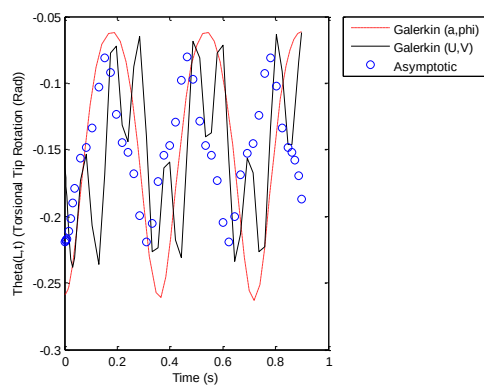
شکل (۴): منحنی مودال مود دوم خطی خمشی (c_2)

در شکل (۵) هم مشابه شکل (۴) جابجائی مود اول خطی پیچشی (a_1) را برحسب زاویه فاز مود اول غیرخطی نشان می دهد. در شکل (۵) دو روش گالرکین (جابجائی-سرعت) و مجانبی رفتار مشابهی از خود نشان می دهند. علت این تشابه به خاطر نزدیک بودن معادلات قیدی پیچشی هر دو روش می باشد به این دلیل که هر دو روش با فرض دامنه جابجائی و سرعت مسئله رو حل می کنند.

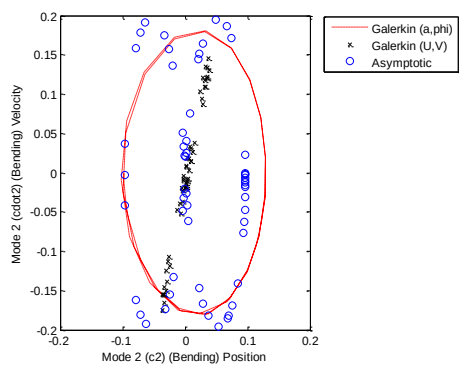
$j=1, \dots, 6, N_b + N_t = 6$ در نظر گرفته شده است و برای حل مسئله در مود اول $k=1$ و $j=2,3,4,5,6$ در نظر گرفته شده است. و برای حل در مود اول درجه آزادی مودال اول جابجائی عرضی را به عنوان مود مبنا در نظر گرفته می شود ($c_1 = c_k$) و باقی درجات آزادی مودال جابجائی و پیچشی برحسب مود اول جابجائی عرضی (c_1) مرتب می شود. باید در نظر داشت که $c_4 = a_1, c_5 = a_2, c_6 = a_3$ باشد. همچنین باید توجه داشت که $X_4 = a_1, X_5 = a_2, X_6 = a_3$ و متناظر با آن $Y_4 = \dot{a}_1, Y_5 = \dot{a}_2, Y_6 = \dot{a}_3$ سرعت های موده های پیچشی می باشد. باید توجه داشت که P_1, X_1, η_1 معادل c_1 می باشند که به عنوان مود مبنا در نظر گرفته میشوند. حال برای رسم مود اول منیفولد ثابت جابجائی از روش سراسری گالرکین (دامنه-فاز) چون طبق این مرجع [۶۲و۴۱و۱] دارای دقت بیشتری است اما می توان از ۲ روش دیگر هم استفاده نمود. در ضمن برای مقایسه ۳ روش مذکور باید روش های مجانبی و گالرکین سراسری (جابجائی-سرعت) را به فضای دامنه-فاز تبدیل نمود. در ضمن برای استخراج مود اول روش های سراسری گالرکین (دامنه وفاز) ($N_a = 2, N_\phi = 1$) در بازه $\phi \in [0, 2\pi]$ و $a \in [0, 2.2]$ و برای روش سراسری گالرکین (جابجایی و سرعت) ($N_{p,u} = 3, N_{p,v} = 2$) در بازه $U_b \in [-1, 1], V_b \in [-1000, 1000]$ در نظر گرفته شده است. شکل های ۲ و ۳ نشان دهنده مود اول منیفولد ثابت جابجائی و پیچش در فضای فازی است. که در قسمت Φ هارمونیک بودن حرکت را نشان می دهد و در قسمت a غیرخطی و وابسته بودن جابجائی مود دوم خطی به دامنه مود اول غیرخطی را نشان می دهد.



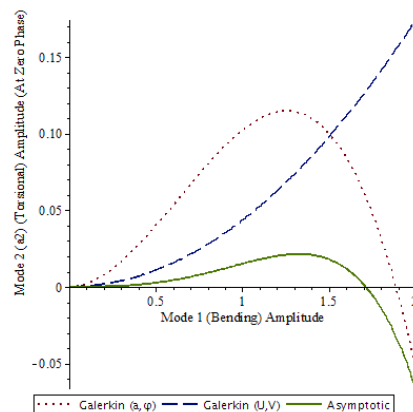
شکل (۲): مود اول منیفولد ثابت : جابجائی مود اول پیچشی.



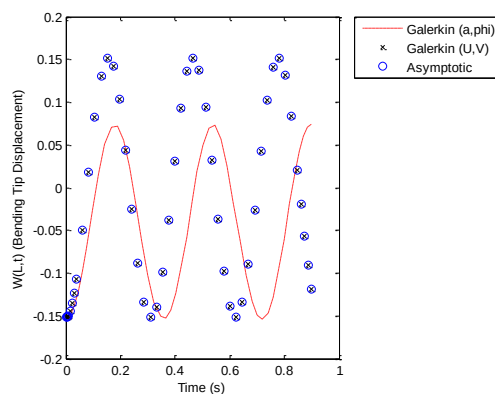
شکل (۷): جابجائی انتهای سمت راست تیر برحسب زمان در شکل (۸) مشاهده می شود تغییرات پیچشی هارمونیک می باشد و مشاهده می شود این بار بر خلاف شکل قبل جواب های روش گالرکین (دامنه-فاز) و مجانبی رفتار مشابهی دارند بدین دلیل که معادلات قیدی پیچشی مشابه در هر دو روش مذکور می باشد.



شکل (۸): صفحه فازی مرتبط به مود ۲ خطی خمشی در شکل (۹) وابستگی دامنه مود اول غیرخطی به فرکانسی طبیعی را نشان می دهد که یکی از ویژگی های سیستم های غیرخطی وابسته بودن فرکانس طبیعی سیستم به دامنه و شکل مود مربوطه و بالعکس می باشد. در ضمن مشاهده می شود جواب روش مجانبی از دو روش دیگر انحراف پیدا کرده است. در ضمن برای استخراج نتایج شکل ۵.۱۰ از روش بالانس هماهنگ استفاده شده است.



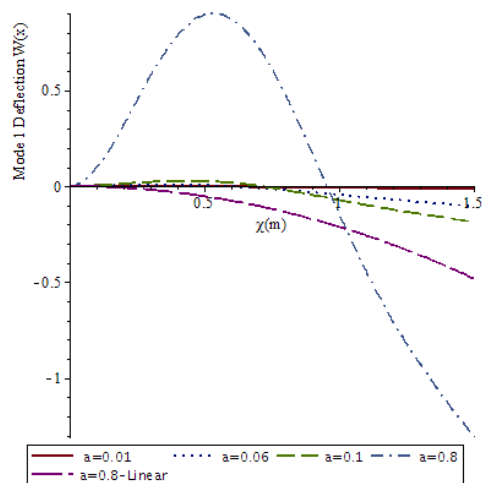
شکل (۵): منحنی مودال مود اول خطی پیچشی (a_1) حال با در نظر گرفتن شرایط اولیه $\eta_1 = 0.001, \dot{\eta}_1 = 0$ می توان پاسخ های زمانی درجات آزادی مود های مربوط در مود اول غیرخطی را بدست آورد. همانطور که از شکل (۶) پیداست می توان گفت که جابجائی انتهایی تیر حرکتی هارمونیک (سینوسی یا کسینوسی) دارد همچنین مشاهده می شود که جواب های مجانبی و گالرکین (جابجائی-سرعت) بر هم منطبق هستند.



شکل (۶): جابجائی انتهای سمت راست تیر برحسب زمان در شکل (۷) مشاهده می شود تغییرات پیچشی هارمونیک می باشد و مشاهده می شود این بار بر خلاف شکل قبل جواب های روش گالرکین (دامنه-فاز) و مجانبی رفتار مشابهی دارند بدین دلیل که معادلات قیدی پیچشی مشابه در هر دو روش مذکور می باشد.

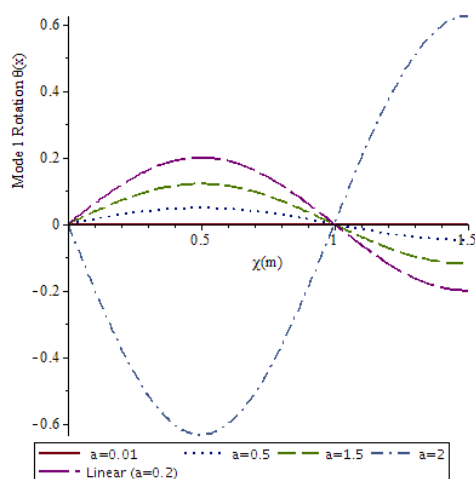
شکل (۱۰): مود اول غیر خطی پیچشی ($a=0.01, \phi=0$)

در شکل (۱۱) تغییرات شکل مود اول غیر خطی پیچشی را نشان می دهد که جواب روش گالرکین (جابجائی-سرعت) از دو روش دیگر اختلاف دارد.



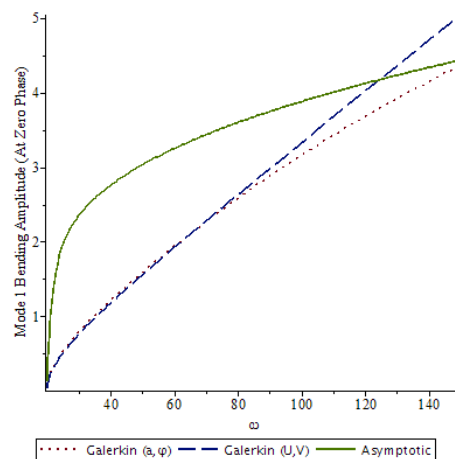
شکل (۱۱): تغییرات مود اول غیر خطی خمشی به ازای افزایش دامنه مود اول غیر خطی

همانطور که پیداست با توجه به شکل (۱۲) تغییرات شکل به تغییرات دامنه مود اول غیر خطی شدیداً وابسته است. از طرفی هم مشاهده می شود که شکل مود خطی کاملاً شکل متفاوتی با شکل مود غیر خطی متناظر خود دارد. در شکل (۱۲) وابستگی شکل مود پیچشی غیر خطی به دامنه مود غیر خطی خمشی را نشان می دهد.

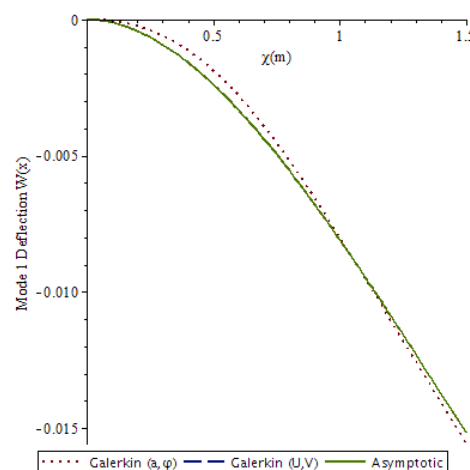


شکل (۱۲): تغییرات مود اول غیر خطی پیچشی به ازای افزایش دامنه مود اول غیر خطی

۵- نتایج استخراج شده از مود دوم

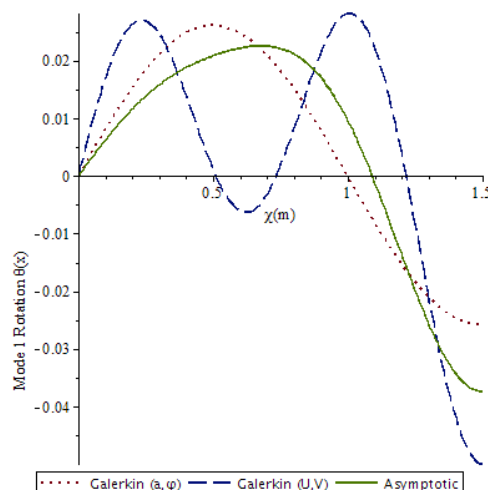


شکل (۹): منحنی پاسخ فرکانسی مود اول غیر خطی خمشی در شکل (۱۰) تغییرات شکل مود اول غیر خطی خمشی را نشان می دهد و انطباق داشتن هر سه جواب را نشان می دهد.

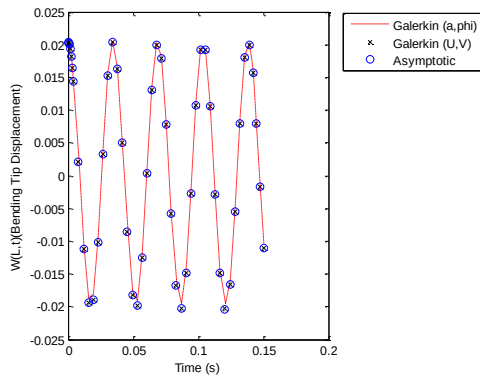


شکل (۱۰): مود اول غیر خطی خمشی ($a=0.01, \phi=0$)

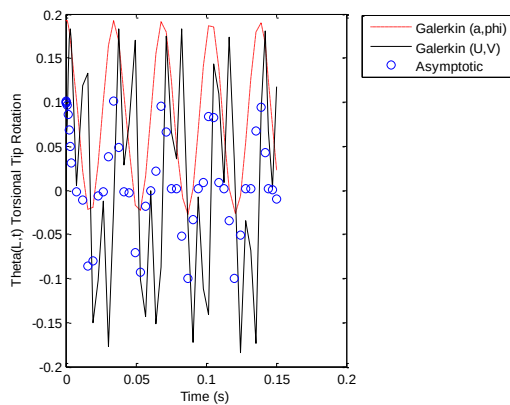
در شکل ۵.۱۲ تغییرات شکل مود اول غیر خطی پیچشی را نشان می دهد که جواب روش گالرکین (جابجائی-سرعت) از دو روش دیگر اختلاف دارد.



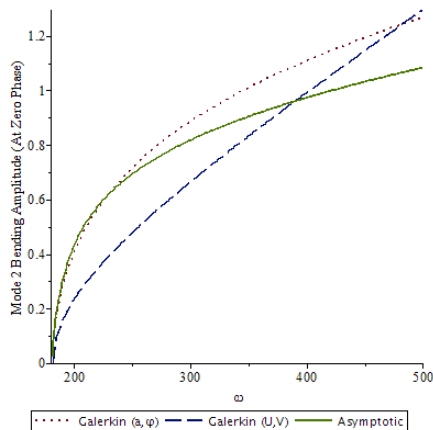
در شکل (۱۵) هم مشاهده می شود که هر سه جواب روی هم منطبق هستند. همچنین از شکل (۱۵) می توان نتیجه گرفت که جابجایی عرضی تیر هارمونیک و نوسانی می باشد.



شکل (۱۵): جابجایی انتهای سمت راست تیر برحسب زمان در شکل (۱۶) نوسانی بودن رفتار پیچشی انتهای سمت راست تیر را نشان می دهد. که در آن جواب های هر سه روش از هم فاصله دارند. که آنهم به خاطر ایجاد اختلاف در معادلات قیدی می باشد.



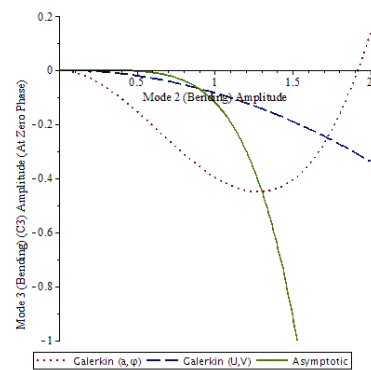
شکل (۱۶): پیچش انتهای سمت راست تیر برحسب زمان در شکل (۱۷) وابستگی فرکانس طبیعی و دامنه مود دوم غیرخطی را نمایش می دهد.



شکل (۱۷): منحنی پاسخ فرکانسی مود دوم غیرخطی خمشی

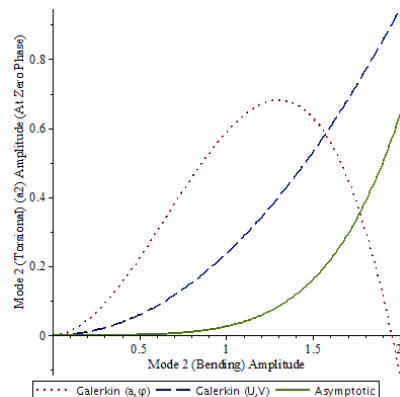
حال در پیش رو نتایج مود دوم به نمایش گذاشته می شود. مشابه مود اول برای استخراج مود دوم روش های سراسری گالرکین (دامنه وفاز) $(N_a = 2, N_\varphi = 1)$ در بازه $\varphi \in [0, 2\pi], a \in [0, 2.2]$ برای روش سراسری گالرکین (جابجایی و سرعت) $(N_{p,u} = 3, N_{p,v} = 2)$ در بازه $U_b \in [-1, 1], V_b \in [-1000, 1000]$ گرفته شده است. همچنین برای شرایط اولیه در مود دوم مشابه مود اول $\eta_2 = 0.01, \dot{\eta}_2 = 0$ در نظر گرفته شده است. برای حل مسئله در مود دوم $k=2$ و $j=1, 3, 4, 5, 6$ در نظر گرفته شده است. برای حل در مود دوم درجه آزادی مودال خمشی را به عنوان مود مبنا در نظر گرفته می شود $(= C_2)$ و C_k و باقی درجات آزادی مودال جابجایی و پیچشی برحسب مود دوم خمشی (C_2) مرتب می شود.

در شکل (۱۳) وابستگی جابجایی مود سوم خمشی را به دامنه مود دوم غیرخطی خمشی نمایش می دهد و همانطور که از شکل پیداست جواب روش مجانبی از جواب دو روش دیگر فاصله دارد.



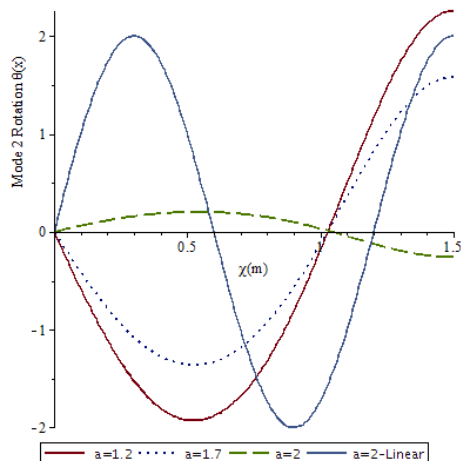
شکل (۱۳): منحنی مودال مود سوم خطی خمشی (C_3) .

در شکل (۱۴) مشاهده می شود که جواب روش مجانبی و گالرکین (جابجایی سرعت) از جواب های دو روش دیگر انحراف شدیدتری پیدا کرده اند.



شکل (۱۴): منحنی مودال مود دوم خطی پیچشی (a_2)

شکل (۲۰): تغییرات مود دوم غیرخطی خمشی به ازای افزایش دامنه مود دوم غیرخطی
در شکل (۲۱) مشاهده می شود با افزایش دامنه مود شکل مود تغییر ناگهانی پیدا می کند.



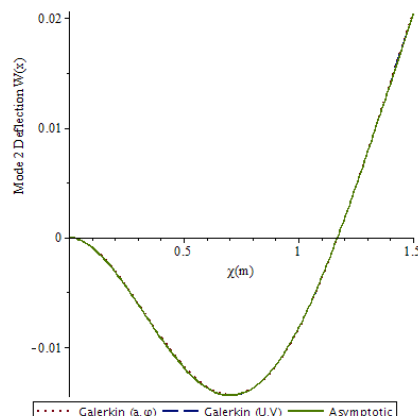
شکل (۲۱): تغییرات مود دوم غیرخطی پیچشی به ازای افزایش دامنه مود دوم غیرخطی

۶- نتایج استخراج شده از مود سوم

حال به بررسی نتایج مود سوم پرداخته می شود. مشابه مود اول و دوم برای استخراج مود سوم روش های سراسری گالرکین (دامنه وفاز) $(N_a = 2, N_\varphi = 1)$ در بازه $\varphi \in [0, 2\pi]$ و برای روش سراسری گالرکین (جابجایی و سرعت) $(N_{p,u} = 2, N_{p,v} = 3)$ در بازه $U_b \in [-1, 1], V_b \in [-1000, 1000]$ در نظر گرفته شده است. همچنین برای شرایط اولیه در مود سوم $\eta_3 = 0.03, \dot{\eta}_3 = 0$ در نظر گرفته شده است. مسئله در مود سوم $k=3$ و $j=1, 2, 4, 5, 6$ در نظر گرفته شده است. برای حل در مود سوم درجه آزادی مودال خمشی را به عنوان مود مبنا در نظر گرفته می شود $(C_3 = C_k)$ و باقی درجات آزادی مودال جابجایی و پیچشی برحسب مود سوم خمشی (C_2) مرتب می شود.

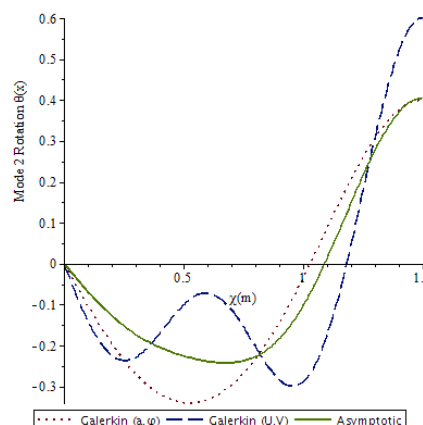
در شکل های (۲۲) و (۲۳) برخلاف شکل های (۲) و (۳) منی فولد ثابت به ازای دامنه های جابجایی و سرعت مود سوم غیرخطی خمشی رسم شده است و همانطور که از شکل پیداست به دلیل غیرخطی بودن سیستم مورد نظر منحنی های منی فولد ثابت در فضای فاز خمیده شده اند در حالی که اگر سیستم مورد نظر خطی بود منحنی های منی فولد ثابت در فضای فاز به صفحه تبدیل می شدند. در ضمن از روش گالرکین (جابجایی-سرعت) برای رسم شکل های (۲۲) و (۲۳)

در شکل (۱۸) مود دوم غیرخطی خمشی را نشان می دهد همچنین برخلاف شکل مود اول غیرخطی خمشی هر سه جواب روی هم منطبق شده اند.



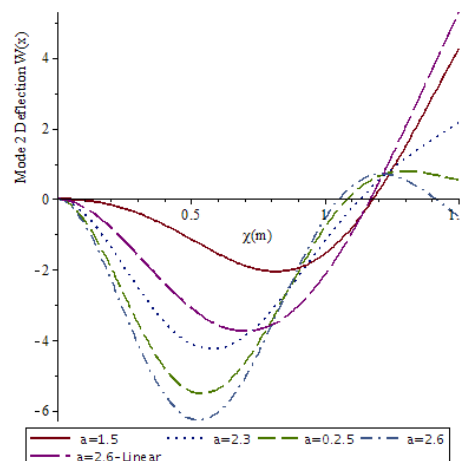
شکل (۱۸): مود دوم غیرخطی خمشی $(a=0.01, \phi=0)$

در شکل (۱۹) هم مشابه شکل ۵.۱۲ اختلاف جواب گالرکین (جابجایی-سرعت) از دو روش دیگر مشاهده می شود.

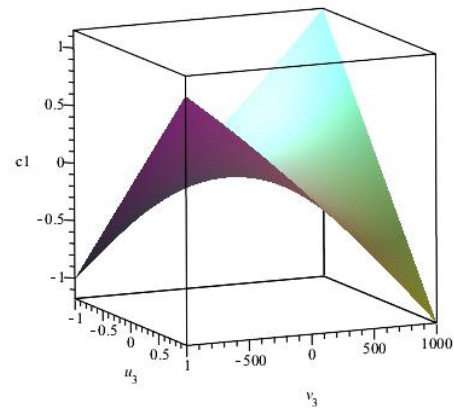


شکل (۱۹): مود دوم غیرخطی پیچشی $(a=0.01, \phi=0)$

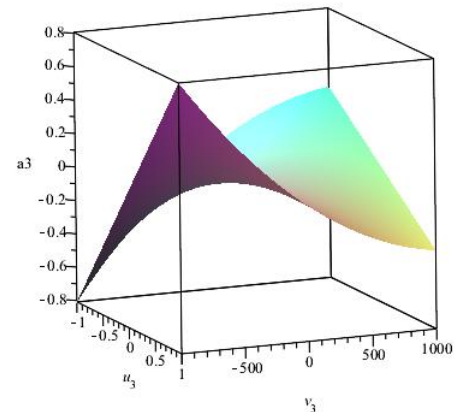
در شکل (۲۰) وابستگی شدید مود دوم غیرخطی نسبت به افزایش دامنه مود دوم غیرخطی مشاهده می شود. از طرفی هم مشاهده می شود که شکل مود خطی کاملاً شکل متفاوتی با شکل مود غیرخطی متناظر خود دارد.



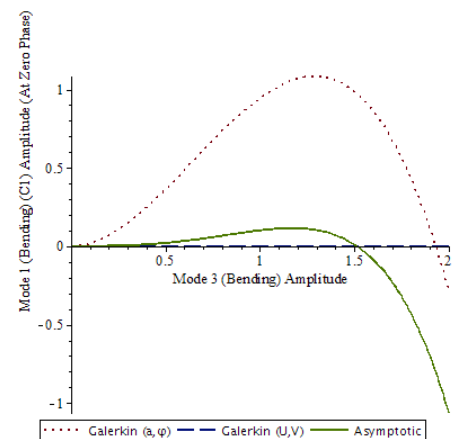
استفاده شده است علاوه بر آن از روش مجانبی هم می توان برای رسم این نوع از اشکال استفاده نمود.



شکل (۲۲): مود سوم منیفولد ثابت: مود اول خطی خمشی



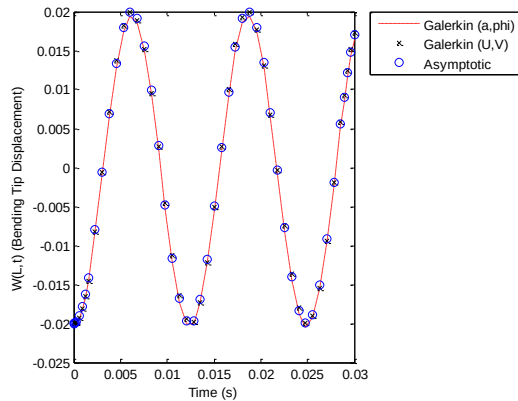
شکل (۲۲): مود سوم منیفولد ثابت: مود سوم خطی پیچشی
در شکل (۲۳) جواب گالرکین (جابجائی -سرعت) به خاطر وجود عبارت $\sin(\phi)$ در معادلات قیدی در صفحه a ($\phi=0$) به صفر تبدیل شده است.



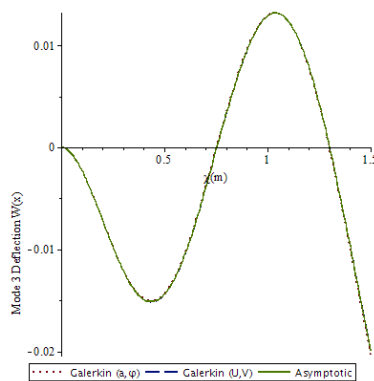
شکل (۲۳): منحنی مودال مود اول خطی خمشی c1

برحسب دامنه مود سوم غیرخطی خمشی.

در شکل (۲۴) هم مشاهده می شود که هر سه روش بر روی یکدیگر منطبق شدند.

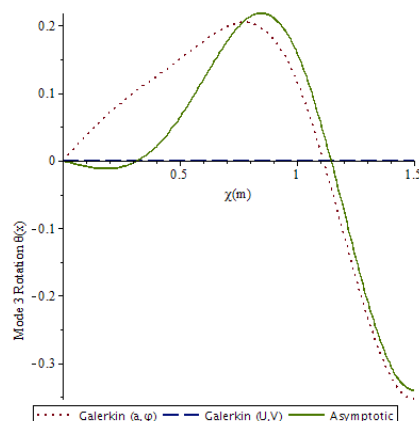


شکل (۲۴): جابجائی انتهای سمت راست تیر برحسب زمان
در شکل (۲۵) هم اختلافی در هر سه جواب مشاهده نمی شود.



شکل (۲۵): مود سوم غیرخطی خمشی ($a=0.01, \phi=0$)

در شکل (۲۶) هم مشاهده می شود که روش گالرکین دامنه فاز قادر به نمایش شکل مود غیرخطی پیچشی نمی باشد آنهم به دلیل وجود عبارت $\sin(\phi)$ در رابطه شکل مود غیرخطی می باشد که به ازای $\phi=0$ شکل مود را صفر می کند.



از طرفی روش تحلیلی مجانبی برای سیستم پیوسته و گسسته با دامنه محدود جواب های قابل قبولی دارد. از طرفی هم باید در نظر داشت که تیر مورد بررسی با فرض ارتعاشات آزاد بررسی شده است.

همانطور که در بخش های قبل اشاره شد می توان بال نسبت منظری بالا رو در محیط ۲ بعدی توسط تیر غیرخطی یک سرگردار فلزی همگن مدل سازی کرد. دلیل مدل سازی کردن غیرخطی تیر اینست که می توان با اثرات تغییر شکل های خمشی بزرگ و همچنین پیچش های بزرگ را مدل کرد در حالی که در حالت در نظر گرفتن تیر به صورت خطی قادر به مشاهده این نوع از تغییرات نیستیم. از طرفی در بال های با نسبت منظری بالا که از آن می توان در پهباد ها و گلایدارها و جنگنده ها استفاده می شود همواره دارای تغییر شکل های بزرگ به خاطر عوامل محیطی همچون باد و تند باد و مانور و غیره می باشند به همین خاطر با مدل کردن آن بال به صورت غیرخطی عملا می توان درک و بینش بهتری از رفتار و پدیده دینامیکی بال مورد نظر داشت. از این رو در این پروژه تحقیقاتی با بررسی ارتعاشات تیر غیرخطی فلزی همگن یک سرگردار قادر به درک و مشاهده رفتار های حاصل از ترکیب حرکت های ارتعاشی خمشی و پیچشی بال مورد نظر در محیط ۲ بعد شد. از این رو می توان با استفاده از موادی با قابلیت بالاتر برای ساخت این نوع از بال های منعطف اقدام به عمل آورد.

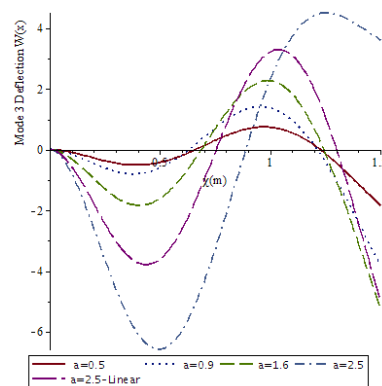
از طرفی در این مقاله سعی شد روش های تحلیلی و نیمه تحلیلی موجود در روش منیفولد ثابت معرفی و در انتهای بر روی این بال دو بعدی پیاده سازی شود و بعدا نتایج خروجی از آن روش های با هم مقایسه شد. و مشاهده شد که حرکت ارتعاشی خمشی و پیچشی دائما بر روی یکدیگر تاثیر گذار هستند برای مثال نشان داده شده با تغییرات دامنه مود خمشی غیرخطی مورد نظر علاوه بر تغییر شکل مود غیرخطی خمشی، شکل مود پیچشی غیرخطی هم دستخوش تغییر شد. علاوه بر آن مشاهده شده که شکل مودهای پیچشی غیرخطی لزوما مشابه شکل مودها پیچشی در حالت خطی نشد.

همچنین می توان پیشنهادات زیر برای کارهای آتی اعمال نمود:

اول: با توجه به نیمه تحلیلی بودن روش های سراسری گالرکین می توان از آنها برای مسائلی با ساختار پیچیده تر استفاده نمود. ولی از روش مجانبی برای مسائلی با سازه پیچیده تر کار بسیار سخت تر و چه بسا بیهوده تر می شود.

شکل (۲۶): مود سوم غیرخطی پیچشی ($a=0.01, \phi=0$)

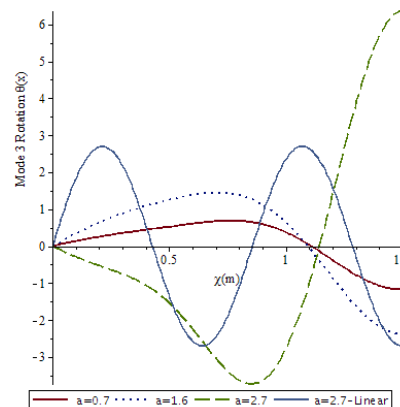
در شکل (۲۷) مشاهده می شود که با افزایش هرچه بیشتر دامنه مود سوم غیرخطی شکل مود سوم غیرخطی حاصل از خمش هم از شکل مشابه شکل مود خطی اش فاصله می گیرد و به شکلی غیرمشابه تبدیل می شود ولی در حالی که در شکل مود خطی با افزایش دامنه مود خطی فقط ابعاد شکل مود خطی افزایش پیدا می کند.



شکل (۲۷): تغییرات مود سوم غیرخطی خمشی به ازای

افزایش دامنه مود سوم غیرخطی

در شکل (۲۸) همانطور که انتظار می رود رفتار شکل مود غیرخطی پیچشی به خاطر تغییر دامنه مود غیرخطی خمشی به راحتی قابل مشاهده می باشد.



شکل (۲۸): تغییرات مود سوم غیرخطی خمشی به ازای

افزایش دامنه مود سوم غیرخطی

۵- نتیجه گیری

با توجه به نتایج استخراج شده بالا می توان استنتاج کرد که روش های نیمه تحلیلی سراسری گالرکین دارای قابلیت بالایی در تحلیل مسائل شامل سیستم های پیوسته همچون تیر و صفحه رو دارند از طرفی باید خاطر نشان کرد که صحت سنجی روش های نیمه تحلیلی سراسری گالرکین در این مراجع [۴ و ۵] بررسی شده است.

12. Li, X. (2006). "Non-linear normal modes and their bifurcation of a two DOF system with quadratic and cubic non-linearity." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 41(9): 1028-1038.
13. Wang, F. and A. K. Bajaj (2007). "Nonlinear normal modes in multi-mode models of an inertially coupled elastic structure." *Nonlinear Dynamics* 47(1-3): 25-47.

دوم: از طرفی با توجه به ماهیت سینوسی و کسینوسی بودن روش سراسری گالرکین (دامنه - فاز) می توان آن را برای مسائلی شامل ارتعاشات اجباری و مسائل حاوی جاذب دینامیکی به کار برد.

سوم: همچنین با توجه به قابلیت بالای روش سراسری گالرکین (دامنه - فاز) می توان برای تحلیل پدیده هائی همچون چند شاخگی و یا تشدید و تقابل مودال مورد استفاده و توسعه قرار گیرد.

چهارم: همچنین می توان این سه روش اشاره شده رو برای یک صفحه که مدل دقیق تری از تیر است به کار برد.

۷- مراجع

1. Shaw, S. W. and C. Pierre (1993). "Normal modes for non-linear vibratory systems." *Journal of Sound and Vibration* 164(1): 85-124.
2. Boivin, N. (1995). "Non-linear normal modes, invariance, and modal dynamics approximations of non-linear systems." *Nonlinear Dynamics* 8(3): 315-346.
3. Shaw, S. W. and C. Pierre (1994). "Normal modes of vibration for non-linear continuous systems." *Journal of Sound and Vibration* 169(3): 319-347.
4. Pesheck, E. (2009). Reduced order modeling of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and invariant manifolds, The University of Michigan.
5. Apiwattanalungarn, P. (2003). Model reduction of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and component mode synthesis.
6. Haider, N. Arafat. (2000). "Nonlinear Responses Of Cantilever Beam", Phd Thesis.
7. Lacarbonara, W., et al. (2003). "Resonant non-linear normal modes. Part I: analytical treatment for structural one-dimensional systems." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38(6): 851-872.
8. Lacarbonara, W. and G. Rega (2003). "Resonant non-linear normal modes. Part II: activation/orthogonality conditions for shallow structural systems." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38(6): 873-887.
9. Jiang, D. (2005). "Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation." *Journal of Sound and Vibration* 288(4): 791-812.
10. Emory, C. W. and M. J. Patil (2011). Prediction of Limit Cycle Oscillation in an Aeroelastic System using Asymptotic Nonlinear Normal Modes. 52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 19th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 13t.
11. Mazzilli, C. and O. B. Neto (2002). "Evaluation of non-linear normal modes for finite-element models." *Computers & Structures* 80(11): 957-965.

۸- داوری مقالات

نویسندگان محترم جهت سهولت در امر داوری سه نفر از اساتید حوزه مربوطه (از دانشگاه‌های مختلف) را به دفتر نشریه معرفی نمایند (در صفحه آخر مقاله).

ردیف	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	حوزه کاری	دانشگاه محل کار	تلفن همراه	رایانامه
۱						
۲						
۳						

↑ تا حد امکان دو ستون موجود در صفحه آخر را تراز کنید. ↑