




بر نام خدا



Market Code

حل معادله لاپلاس به روش اجزا مرزی در میدان سه بعدی

نسخه: ۱/۰

	محمد رضا برهان پناه: کارشناس ارشد، دانشجو	توسعه دهنده (گان):
	روح اله دهقانی فیروزآبادی: دکتری، هیئت علمی	
		
	محمد رضا برهان پناه	تهیه کننده مستند:
	۳۰ / ۰۳ / ۱۳۹۳	تاریخ تنظیم سند:

فهرست مطالب

۵	فصل ۱: راهنمای کاربری
۵	۱-۱. معرفی ورودی و خروجی‌های کد مهندسی
۸	۲-۱. خروجی برنامه
۹	۳-۱. الزامات اجرای برنامه
۱۰	فصل ۲: مستندات آموزشی
۱۰	۱-۲. رابطه ی لاپلاس ^[۱]
۱۰	۲-۲. توسعه روابط اجزاء مرزی
۱۳	۳-۲. حل داخل میدان
۱۳	۴-۲. پیاده‌سازی
۱۷	فصل ۳: توضیح کد
۱۹	۱-۳. تابع main
۲۱	۲-۳. تابع LoadMesh
۲۱	۳-۳. تابع BCs
۲۱	۴-۳. تابع GaussPoints
۲۲	۵-۳. تابع FillAB
۲۲	۶-۳. تابع N
۲۲	۷-۳. تابع N_px
۲۳	۸-۳. تابع q_star
۲۳	۹-۳. تابع phi_star
۲۳	۱۰-۳. تابع SolveBoundary
۲۴	۱-۱۰-۳. تابع SolverInterior
۲۴	۱۱-۳. تابع SolveLinearSys
۲۵	۱۲-۳. تابع ExportMesh
۲۶	فصل ۴: اعتبارسنجی کد
۳۱	فصل ۵: فهرست مراجع
۳۲	فصل ۶: پیوست‌ها
۳۲	(پ-۱) محاسبه‌ی انتگرال به روش عددی گاوس

Market Code

چکیده

معادله‌ی لاپلاس کاربردهای فراوانی در مسائل مهندسی دارد، از جمله تحلیل جریان پتانسیل، انتقال حرارت و میدان الکترومغناطیسی. در این کد، معادله‌ی لاپلاس برای یک میدان دو بعدی به روش عددی اجزا مرزی حل شده است. ابتدا روابط حاکم برای مرز میدان توسعه داده شده است و سپس مسئله به شکل ماتریسی $A\phi + B \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ (که ϕ تابع پتانسیل است) گسسته سازی شده است و با اعمال شرایط مرزی حل شده است. این کد برای میدان سه بعدی با هندسه‌ی دلخواه نوشته شده است. این کد برای میدان سه بعدی با هندسه‌ی دلخواه نوشته شده است. در مرز میدان از المان‌های دو بعدی مختلف استفاده شده است. برای محاسبه‌ی انتگرال از روش گاوس با مرتبه‌های مختلف استفاده شده است. خروجی کد شامل توزیع ϕ و $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ روی مرز میدان است.

کلمات کلیدی: معادله لاپلاس، روش اجزا مرزی، سه بعدی

فصل ۱: راهنمای کاربری

کد با زبان ++c نوشته شده و با Microsoft Visual Studio کامپایل شده است. برای محاسبات ریاضی از کتابخانه‌ی `alglib` استفاده شده است.

۱-۱. معرفی ورودی و خروجی‌های کد مهندسی

ورودی‌های کد حاضر از طریق سه فایل متنی گرفته می‌شود. آدرس این سه فایل در تابع `main` تعیین شده‌اند. این فایل‌ها عبارت‌اند از

- `meshFile` : فایل شبکه مرز (گره‌ها و المان‌ها)
- `iMeshFile` : فایل شبکه درون میدان (گره‌ها و المان‌ها) – وارد کردن این فایل اختیاری است
- `bcsFile` : فایل شرایط مرزی

فایل `meshFile` و `iMeshFile` فایل‌های با پسوند `rpt.01` هستند که می‌توانند گزارش (`report file`) تولیدشده توسط نرم‌افزار `MSC. Patran` باشند و یا به صورت دستی آماده شوند. این فایل‌ها شبکه محاسباتی را تعیین می‌کند که شامل مختصات گره‌ها و شماره گره‌ها درون المان‌ها است. چنانچه کاربر قصد داشته باشد شبکه را به صورت دستی تولید کند، باید قالب زیر را رعایت کند

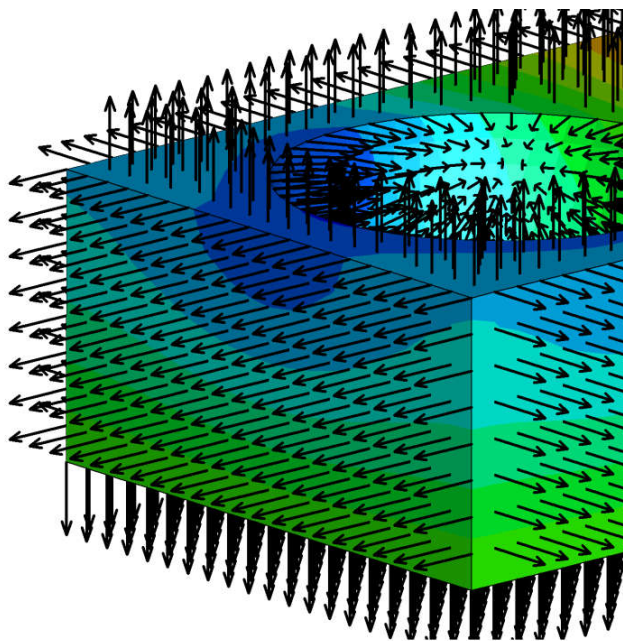
Total number of entities:				
Nodes	Elements			
3050	3048			
تعداد گره ها و المان ها				
Element Connectivity:				
ID	Pos 1	Pos 2	Pos 3	Pos 4
1	3	39	38	1
2	4	40	39	3
3	6	40	4	2
شماره گره ها در المان ها				
.
.
3047	2599	2600	2553	2552
3048	2600	2593	2545	2553
Node Attributes (Coordinates are in Reference CF)				
ID	Coord 1	Coord 2	Coord 3	
1	6.000000	4.000000	2.000000	
2	6.000000	3.500000	2.000000	
3	6.000000	3.833333	2.000000	
مختصات گره ها				
.
.
3049	0.600000	4.000000	0.000000	
3050	0.000000	4.000000	0.000000	

شکل (۱) نمونه فایل ورودی

در شبکه (مش) درون میدان، المان‌ها دارای چهار گره هستند (المان چهار وجهی چهار گره‌ای). البته در صورت استفاده از سایر انواع المان‌ها کافی است در تابع main قسمت ۴ تعداد و نوع المان‌ها تعیین شود. المان‌های درون میدان ممکن است حتی از نوع دو بعدی و باشند (مثلاً برای حالتی که فقط روی یک صفحه مشخص درون میدان توزیع تابع پتانسیل نیاز است).

ضمناً در مورد مش موارد زیر باید مورد توجه قرار گیرد

- شماره گره‌ها باید از ۱ شروع شده و تا N (تعداد گره‌ها) به طور پیوسته ادامه یابد
- در شبکه مرزی باید نرمال المان‌ها به بیرون میدان باشد، برای بررسی این موضوع می‌توان از خروجی برنامه استفاده نمود. در صورت برعکس بودن نرمال باید ترتیب گره‌های المان برعکس شود. به طور مثال شکل زیر خروجی نرم‌افزار با نرمال‌های درست را نشان می‌دهد
- شبکه مرزی از نظر محاسباتی اهمیت ندارد و تنها موقعیت گره‌های آن مهم است ولی نوع المان تنها در نمایش خروجی اثر گذار است



شکل (۲) جهت درست نرمال المان‌ها (در خروجی کد)

فایل دیگر bcsFile است که شرایط مرزی در آن تعیین می‌شود. این فایل یک فایل متنی است و فرمت زیر را دارد

```
3 # box x1 x2 y1 y2 z1 z2 phi|q value, sphere x1 y1 z1 r phi|q value
box 0 8 0 4 0 0.001 phi 0
sphere 2 2 2 1.5001 q -100
sphere 6 2 2 1.5001 phi 100
```

شکل (۳) نمونه فایل شرایط مرزی

خط اول از این فایل تعداد شرط مرزی‌ها را تعیین می‌کند (ادامه این خط توضیحات است) و خطوط بعدی شرایط مرزی را تعیین می‌کنند. در خطوط بعد شرایط مرزی تعیین می‌شوند. شرایط مرزی به یکی از دو صورت زیر داده می‌شوند

- درون کره

در ابتدای خط عبارت box قرار دارد و بعد از آن ۳ مختصه برای مرکز کره و سپس شعاع کره گرفته می‌شود و گره‌هایی که درون این کره قرار گیرند شرط مرزی به آن اعمال می‌شود. پارامتر بعدی که عبارت phi یا q است تعیین می‌کند که مقدار داده شده پس از این عبارت، مقدار مرزی برای ϕ (تابع پتانسیل) است یا

$$q \text{ (شار, } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{)}$$

- درون مکعب مستطیل

در ابتدای خط عبارت box قرار دارد و بعد از آن ۶ مختصات گرفته می‌شود که تشکیل مکعب مستطیلی

می‌دهد که گره‌هایی که درون آن قرار گیرند شرط مرزی به آن اعمال می‌شود، در حالت خاص این مکعب مستطیل می‌تواند تبدیل به صفحه (مثلاً وقتی $x_1=x_2$ است) یا حتی خط شود. پارامتر بعدی که عبارت ϕ یا q است تعیین می‌کند که مقدار داده‌شده پس از این عبارت، مقدار مرزی برای ϕ (تابع پتانسیل) است یا برای q (شار، $\frac{\partial\phi}{\partial n}$).

برای گره‌هایی که هیچ شرط مرزی داده نشده باشد، $q=0$ در نظر گرفته می‌شود.

ضمناً تعداد نقاط انتگرال‌گیری در المان‌ها توسط متغیر $nGaussPoints$ قابل کنترل است. مقدار این متغیر می‌تواند از ۱ تا ۴ باشد.

۲-۱. خروجی برنامه

خروجی برنامه یک فایل متنی است که شامل مقادیر ϕ (تابع پتانسیل) و q (شار، $\frac{\partial\phi}{\partial n}$) برای تمام گره‌ها است. آدرس این فایل در متغیر `resultFile` ذخیره می‌شود. نمونه ای از فایل خروجی در زیر نشان داده شده است. این فایل با فرمت داده‌های ورودی نرم‌افزار `tecplot` است.

Variables = x y z phi q nx ny nz							
Zone							
N=3050, E=3048, ZONETYPE=FEQuadrilateral DATAPACKING=POINT							
6	4	2	90.30	0	0	1	0
6	3.5	2	97.52	0	0.06	-0.99	0.06
.							
.							
.							
0.6	4	0	0	26.6436	0	0	-1
0	4	0	0	13.998	0	0	-1
3	39	38	1				
4	40	39	3				
6	40	4	2				
.							
.							
.							
2603	2599	2552	2550				
2599	2600	2553	2552				
2600	2593	2545	2553				

شکل (۴) نمونه فایل خروجی

در فایل خروجی، در قسمت گره‌ها ۸ ستون وجود دارد که به ترتیب مقادیر x ، y ، z ، ϕ و q و مولفه‌ها بردار نرمال برای هر گره هستند.

۳-۱. الزامات اجرای برنامه

پس از آماده‌سازی فایل‌های ورودی (شبکه و شرایط مرزی)، برنامه قابل اجرا خواهد بود. برنامه حاضر به زبان C++ نوشته شده و در آن از توابع کتابخانه‌ای Alglib استفاده شده است. لذا برای اجرای برنامه می‌بایست این کتابخانه اضافه شود. (در فایل پروژه ای که در ویژوال استودیو ساخته شده، اضافه شده است) برای اضافه کردن این کتابخانه به پروژه در محیط ویژوال استودیو باید ابتدا فایل‌های کد این کتابخانه را در یک مسیر مشخص قرار داد (باید از حالت فشرده خارج کرد). سپس از طریق مسیر زیر در ویژوال استودیو باید این مسیر را به لیست مسیرهای include پروژه اضافه نمود

Visual Studio Main Menu >> PROJECT >> Properties >> VC++ Directories >> Include Directies

سپس برای استفاده از توابع مورد نیاز از کتابخانه‌ی alglib، در این پروژه، در ابتدای فایل MathTools.h عبارات زیر نوشته شده است

```
...  
#include "alglib_src\ap.h"  
#include "alglib_src\solvers.h"  
using namespace alglib_impl;  
...
```

فصل ۲: مستندات آموزشی

۲-۱. رابطه‌ی لاپلاس^[۱]

برای یک میدان پتانسیل رابطه‌ی زیر حاکم است

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

رابطه‌ی فوق به معادله‌ی لاپلاس مشهور است. در آن ϕ تابع پتانسیل است (به طور مثال در یک میدان جریان غیر لزج و تراکم ناپذیر ϕ تابع پتانسیل سرعت است و داریم $v = \nabla \phi$). این معادله در تمام میدان برقرار است.

۲-۲. توسعه روابط اجزاء مرزی

روش اجزاء مرزی (BEM) یک روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله است. این روش مشابه روش اجزاء محدود (FEM)، معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله را روی یک شبکه (مش) به صورت گسسته حل می‌کند. تفاوت اصلی این روش با روش اجزاء محدود آن است که در این روش محاسبات تنها روی مرز میدان انجام می‌شود و نیازی به ایجاد شبکه برای درون میدان نیست. این سبب کاهش بسیار چشم‌گیری در حجم محاسبات مورد نیاز و هم‌چنین حافظه‌ی مورد نیاز می‌شود. البته پس از حل مرز میدان، در صورت نیاز برای هر نقطه دلخواه درون میدان نیز می‌توان با استفاده از حل روی مرز، مقدار تابع مورد نظر (تابع پتانسیل) را با انتگرال‌گیری محاسبه نمود.