به نام خدا

حل معادله لاپلاس به روش اجزا مرزی در میدان دو بعدی

نسخه: ۱/۰

توسعه‌دهنده (گان):	محمدرضا برهان پناه: کارشناس ارشد، دانشجو	
	روح اله دهقانی فیروزآبادی: دکتری، هیئت‌علمی	
تهیه‌کننده مستند:	محمدرضا برهان پناه	
تاریخ تنظیم سند:	۱۳۹۳/ ۰۳ / ۳۰	

فهرست مطالب

فصل ۱: راهنمای کاربری ۴

۱-۱. شناسنامه کد ۴

۱-۲. معرفی ورودی و خروجی‌های کد مهندسی ۴

۱-۳. خروجی برنامه ۶

۱-۴. الزامات اجرای برنامه ۷

فصل ۲: مستندات آموزشی ۹

۲-۱. رابطه‌ی لاپلاس [۱] ۹

۲-۲. توسعه روابط اجزاء مرزی ۹

۲-۳. حل داخل میدان ۱۲

۲-۴. پیاده‌سازی ۱۲

فصل ۳: توضیح کد ۱۶

۱-۱. تابع main ۱۸

۱-۲. تابع LoadMesh ۱۹

۱-۳. تابع BCs ۱۹

۱-۴. تابع GaussPoints ۱۹

۱-۵. تابع FillAB ۱۹

۱-۶. تابع N ۲۰

۱-۷. تابع N_px ۲۰

۱-۸. تابع q_star ۲۰

۱-۹. تابع phi_star ۲۰

۱-۱۰. تابع SolveBoundary ۲۰

۱-۱۱. تابع SolveInterior ۲۱

۱-۱۲. تابع SolveLinearSys ۲۲

۱-۱۳. تابع ExportMesh ۲۲

فصل ۴: اعتبارسنجی کد ۲۳

فصل ۵: فهرست مراجع ۳۰

Market Code

چکیده

معادله‌ی لاپلاس کاربردهای فراوانی در مسائل مهندسی دارد، از جمله تحلیل جریان پتانسیل، انتقال حرارت و میدان الکترومغناطیسی. در این کد، معادله‌ی لاپلاس برای یک میدان دو بعدی به روش عددی اجزا مرزی حل شده است. ابتدا روابط حاکم برای مرز میدان توسعه داده‌شده است و سپس مسئله به شکل ماتریسی $A\phi + B\frac{\partial \phi}{\partial n} = ۰$ (که ϕ تابع پتانسیل است) گسسته سازی شده است و با اعمال شرایط مرزی حل شده است. این کد برای میدان دو بعدی با هندسه‌ی دلخواه نوشته‌شده است. در مرز میدان از المان‌های دو گرهی bar استفاده شده است. برای محاسبه‌ی انتگرال از روش گاوس با مرتبه‌های مختلف استفاده شده است. خروجی کد شامل توزیع ϕ و $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ روی مرز میدان است.

کلمات کلیدی: معادله لاپلاس، روش اجزا مرزی، دو بعدی

Market Code

فصل ۱: راهنمای کاربری

۱-۱. شناسنامه کد

کد با زبان c++ نوشته‌شده و با Microsoft Visual Studio کامپایل شده است. برای محاسبات ریاضی از کتابخانه‌ی alglib استفاده شده است.

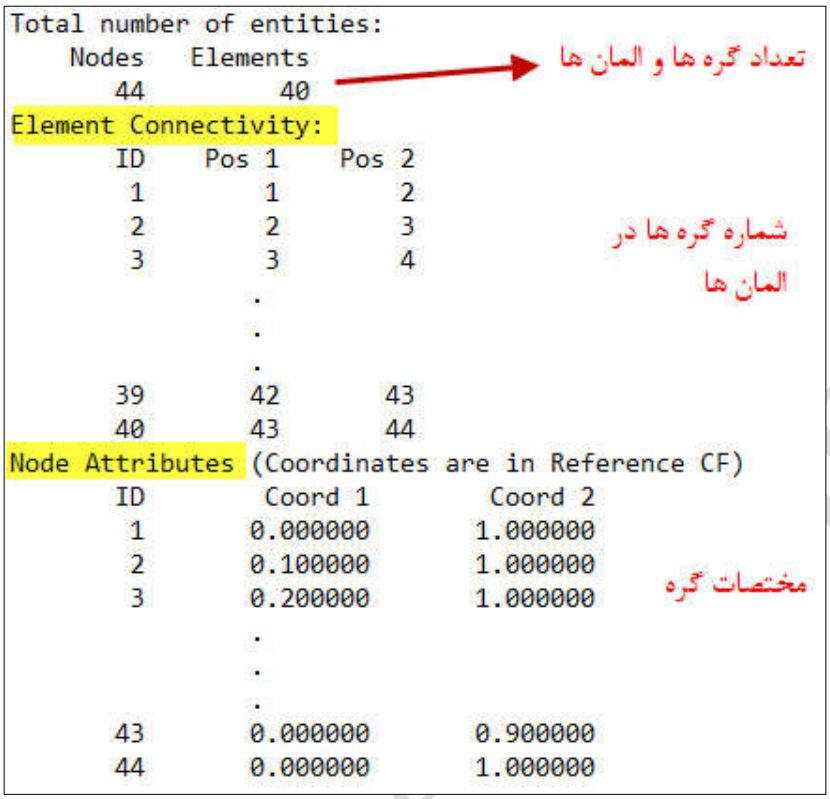
۱-۲. معرفی ورودی و خروجی‌های کد مهندسی

ورودی‌های کد حاضر از طریق سه فایل متنی گرفته می‌شود. آدرس این سه فایل در تابع main تعیین شده‌اند. این فایل‌ها عبارت‌اند از

- meshFile : فایل شبکه مرز (گره‌ها و المان‌ها)
- iMeshFile : فایل شبکه درون میدان (گره‌ها و المان‌ها) – واردکردن این فایل اختیاری است
- bcsFile : فایل شرایط مرزی

فایل meshFile و iMeshFile فایل‌های با پسوند rpt.۰۱ هستند که می‌توانند گزارش (report file) تولیدشده توسط نرم‌افزار MSC. Patran باشند و یا به صورت دستی آماده شوند. این فایل‌ها شبکه محاسباتی را تعیین می‌کند که شامل مختصات گره‌ها و شماره گره‌ها درون المان‌ها است. چنانچه کاربر قصد داشته باشد شبکه را به صورت دستی تولید کند، باید قالب زیر را رعایت کند

Market Code

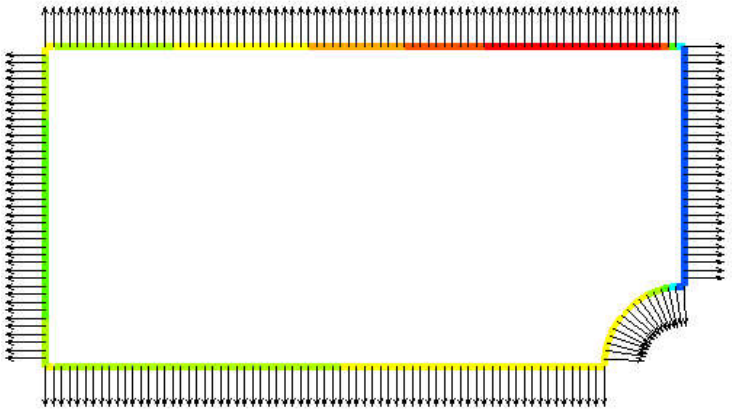


شکل (۱) نمونه فایل ورودی

درمش درون میدان، المان‌ها دارای سه گره هستند (المان مثلثی). ضمناً در مورد مش موارد زیر باید مورد توجه قرار گیرد

- شماره گره‌ها باید از ۱ شروع شده و تا N (تعداد گره‌ها) به طور پیوسته ادامه یابد
- در شبکه مرزی باید نرمال المان‌ها به بیرون میدان باشد، برای بررسی این موضوع می‌توان از خروجی برنامه استفاده نمود. در صورت برعکس بودن نرمال باید ترتیب گره‌های المان برعکس شود. به طور مثال شکل زیر خروجی نرم‌افزار با نرمال‌های درست را نشان می‌دهد

Market



شکل (۲) جهت درست نرمال المان‌ها (در خروجی کد)

فایل دیگر bcsFile است که شرایط مرزی در آن تعیین می‌شود. این فایل یک فایل متنی است و قالب زیر را دارد

```
2 # x1 x2 y1 y2 phi|q value
-16 -16 0 8 q -1
0 0 2 8 phi 0
```

شکل (۳) نمونه فایل شرایط مرزی

خط اول از این فایل تعداد شرط مرزی‌ها را تعیین می‌کند (ادامه این خط توضیحات است) و خطوط بعدی شرایط مرزی را تعیین می‌کنند. در هر خط از فایل ابتدا ۴ مختصات گرفته می‌شود که تشکیل مستطیلی می‌دهد که گره‌هایی که درون آن قرار گیرند شرط مرزی به آن اعمال می‌شود. پارامتر بعدی که phi یا q است تعیین می‌کند که مقدار داده‌شده در ادامه مقدار مرزی برای ϕ (تابع پتانسیل) است یا q (شار، $\frac{\partial \phi}{\partial n}$) .
برای گره‌هایی که هیچ شرط مرزی داده نشده باشد، q=۰ در نظر گرفته می‌شود.
ضمناً تعداد نقاط انتگرال‌گیری در المان‌ها توسط متغیر nGaussPoints قابل کنترل است. مقدار این متغیر می‌توان از ۱ تا ۴ باشد.

۱-۳. خروجی برنامه

خروجی برنامه یک فایل متنی است که شامل مقادیر ϕ (تابع پتانسیل) و q (شار، $\frac{\partial \phi}{\partial n}$) برای تمام گره‌ها

MarketCode

است. آدرس این فایل در متغیر resultFile ذخیره می‌شود. نمونه‌ای از فایل خروجی در زیر نشان داده‌شده است. این فایل با قالب داده‌های ورودی نرم‌افزار tecplot است.

```
Variables = x y phi q nx ny
Zone
N=236, E=236, ZONETYPE=FELINESEG DATAPACKING=POINT
-16     0       -17.4197        -1      -1.e-16 -1
-16     0.2     -17.3266        -1      -1      6.e-17
.
.
.
-15.6   0       -16.901         0       -1.e-16 -1
-15.8   0       -17.1519        0       -1.e-16 -1
1       2
2       3
3       4
.
.
.
234     235
235     236
236     1
```

گره ها

المان ها

شکل (۴) نمونه فایل خروجی

در فایل خروجی، در قسمت گره‌ها ۶ ستون وجود دارد که به ترتیب مقادیر x، y ، ϕ و q و مؤلفه‌ها بردار نرمال برای هر گره هستند.

۱-۴. الزامات اجرای برنامه

پس از آماده‌سازی فایل‌های ورودی (شبکه و شرایط مرزی)، برنامه قابل‌اجرا خواهد بود. برنامه حاضر به زبان C++ نوشته‌شده و در آن از توابع کتابخانه‌ای Alglib استفاده شده است. لذا برای اجرای برنامه می‌بایست این کتابخانه اضافه شود. (در فایل پروژه‌ای که در ویژوال استودیو ساخته‌شده، اضافه شده است)

برای اضافه کردن این کتابخانه به پروژه در محیط ویژوال استودیو باید ابتدا فایل‌های کد این کتابخانه را در یک مسیر مشخص قرارداد (باید از حالت فشرده خارج کرد). سپس از طریق مسیر زیر در ویژوال استودیو باید این مسیر را به لیست مسیرهای include پروژه اضافه نمود

Visual Studiu Main Menu >> PROJECT >> Properties >>VC++ Directories >> Include Directies

Market

سپس برای استفاده از توابع مورد نیاز از کتابخانه‌ی alglib، در این پروژه، در ابتدای فایل MathTools.h عبارات زیر نوشته‌شده است

```
…
#include "alglib_src\ap.h"
#include "alglib_src\solvers.h"
using namespace alglib_impl;
…
```

Market Code

فصل ۲: مستندات آموزشی

۲-۱. رابطه‌ی لاپلاس[۱]

برای یک میدان پتانسیل رابطه‌ی زیر حاکم است

$$\nabla^2 \phi = 0 \qquad (1)$$

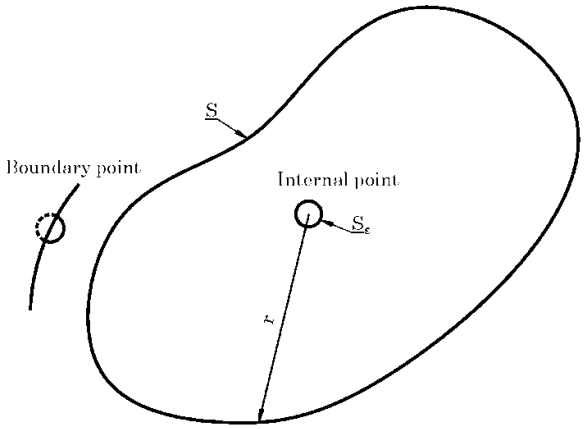
رابطه‌ی فوق به معادله‌ی لاپلاس مشهور است. در آن ϕ تابع پتانسیل است (به طور مثال در یک میدان جریان غیر لزج و تراکم ناپذیر ϕ تابع پتانسیل سرعت است و داریم $v = \nabla\phi$). این معادله در تمام میدان برقرار است.

۲-۲. توسعه روابط اجزاء مرزی

روش اجزاء مرزی (BEM) یک روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله است. این روش مشابه روش اجزاء محدود (FEM)، معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله را روی یک شبکه (مش) به صورت گسسته حل می‌کند. تفاوت اصلی این روش با روش اجزاء محدود آن است که در این روش محاسبات تنها روی مرز میدان انجام می‌شود و نیازی به ایجاد شبکه برای درون میدان نیست. این سبب کاهش بسیار چشم‌گیری در حجم محاسبات مورد نیاز و هم چنین حافظه‌ی مورد نیاز می‌شود. البته پس از حل مرز میدان، در صورت نیاز برای هر نقطه دلخواه درون میدان نیز می‌توان با استفاده از حل روی مرز، مقدار تابع مورد نظر (تابع پتانسیل) را با انتگرال‌گیری محاسبه نمود.

Market Code

مطابق شکل زیر اگر نقطه‌ای دلخواه درون میدان (و یا روی مرز) در نظر بگیریم



شکل (۵) مرز میدان پتانسیل

تابع پتانسیل ناشی از یک چشمه (source) فرضی با قدرت واحد در محل نقطه‌ی P_1 که با دایره‌ای به شعاع ε احاطه شده است را ϕ^* می‌نامیم، داریم

$$\phi^* = \frac{\ln r}{2\pi} \qquad (۲)$$

بنابراین در داخل میدان (به جز داخل دایره‌ی مفروض) رابطه‌ی لاپلاس حاکم است

$$\nabla^2 \phi^* = 0 \qquad (۳)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۳) می‌توان نوشت

$$\int_{A-A_\varepsilon} (\phi^* \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi^*) dV = 0 \qquad (٤)$$

قضیه‌ی دوم گرین [۲] ارتباط بین تغییرات درون میدان و مرز میدان را بیان می‌کند و به صورت زیر است

$$\int_U (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial U} (\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS \qquad (۵)$$

که U میدان و ∂U مرز میدان است.

با استفاده از قضیه‌ی دوم گرین می‌توان رابطه‌ی (۴) را به شکل زیر تبدیل کرد

$$\int_{S,S_\varepsilon} (\phi^* q - \phi q^*) dS = 0 \qquad (٦)$$

$$\int_S (\phi^* q - \phi q^*) dS + \int_{S_\varepsilon} (\phi^* q - \phi q^*) dS = 0 \qquad (۷)$$

لازم به ذکر است $q = \frac{\partial \phi}{\partial n}$، که n بردار یکه عمود بر سطح میدان (بردار نرمال به بیرون) و به سمت خارج میدان است. به طور مثال برای یک جریان سیال پتانسیل، q معرف مؤلفه‌ی عمود بر سطح سرعت است. q^*

Market Code