به نام خدا

Market Code

حل مسئله سیالات جفری– هامل داخل یک گوه با سطوح مسطح به کمک تئوری اغتشاشات هموتوپی

توسعه دهنده:	ایمان شفیعی نژاد: دکترا، مهندسی فضایی	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تهیه کننده مستند:	ایمان شفیعی نژاد	
تاریخ تنظیم سند:	۱ / ۰۵/ ۱۳۹۴	

فهرست مطالب

چکیده

در این گزارش روش جدید اغتشاشی مبتنی بر مبانی هموتوپی ریاضی بر اساس کدهای بیان شده در نرم افزار میپل معرفی می‌گردد. نرم افزار میپل از نرم افزارهای کاربردی ریاضی است که کمک شایانی در ایجاد راه حل‌های ریاضی به ویژه پاسخ‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی ارائه می‌نماید. بر خلاف روش معمول اغتشاشات، در این روش نیازی به پارامتر اغتشاشی کوچک در حل مسئله نخواهد بود. در ابتدا جمله هموتوپی را با کمک یک پارامتر اضافه شده بر سیستم مبتنی بر مفاهیم توپولوژی ریاضیات تشکیل می‌دهیم. این پارامتر اضافه شده یادآور پارامترهای کوچک در تئوری اغتشاشات بوده اما فاقد ماهیت فیزیکی است. لذا این روش را با عنوان اغتشاشات هموتوپی نام گذاری کرده‌اند. به عبارتی دیگر این روش را می‌توان ترکیب دو روش اغتشاشات و هموتوپی در توپولوژی ریاضی دانست. در ادامه برای بیان قابلیت این روش به بررسی مسئله سیال جفری- هامل در داخل یک گوه با دو سطح مسطح پرداخته خواهد شد. از آنجایی که معادلات فوق کاملاً غیر خطی هستند لذا از این روش ریاضی کارآمد بهره برده شده است. شایان ذکر است نتایج این تحقیق در دو مستند یک مقاله و یک کنفرانس بین المللی زیر منتشر شده است.

کلمات کلیدی: هموتوپی، توپولوژی، تئوری اغتشاشات، مسائل غیر خطی، سیالات، جفری- هامل، نرم افزار میپل

***Title:** Homotopy Perturbation Method for Solving Jeffrey - Hamel Flow in a Wedge*

***Journal:** Adv. Studies Theor. Phys., Vol. 6, no. 2, 63 – 72, 2012.*

***Title:** Analytical Solution to Jeffrey – Hamel Flow in a Wedge by Homotopy Perturbation Method*

***Conference:** Proceeding of the Third International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization, Sharjah, U.A.E. 2009.*

فصل ۱: مقدمه

در دو دهه گذشته با پیشرفت سریع صورت گرفته در علوم غیرخطی، علاقه مهندسین و دانشمندان به روش‌های تحلیلی برای حل مسائل غیر خطی افزایش یافته است. روش اغتشاشات در این زمینه بسیار کاربردی و کارآمد بوده و مزیت‌های خود را نشان داده است. اما روش اغتشاشات بر پایه اینکه پارامتر اغتشاشی بایستی درون مسئله باشد قابل بررسی است. به عبارتی وجود پارامتر اغتشاشی، بزرگترین قید کاربردی در روش اغتشاشات است. به عبارت دیگر به عنوان بزرگترین مشکل در حل معادلات غیر خطی می‌توان به این نکته اشاره کرد که این معادلات بعضاً دارای پارامتر اغتشاشی نخواهند بود. لذا برای غلبه بر این مشکل آقایان لیائو و هی در سال ۱۹۹۷ میلادی تکنیک اغتشاشات جدیدی را بر پایه توپولوژی ریاضی پیشنهاد نمودند[۷-۱].

در این روش یک پارامتر مصنوعی در معادله هموتوپی تشکیل داده شده قرار می‌گیرد و این در حالی است که این پارامتر به عنوان یک پارامتر در محدوده صفر و یک فرض می‌گردد. البته باید بیان داشت که در مورد پارامتر مصنوعی وارده اطلاع دقیقی در روند حل بدست نمی‌آید و نیازی هم به آن نبوده و به نوعی تنها نقش یک کاتالیزور را دارد.

در این روش می توان با استفاده از تکنیک اغتشاشات هموتوپی یک مسئله غیر خطی غیر قابل حل را به تعداد محدودی از معادلات قابل حل تقسیم نمود[۱۰-۷].

فصل ۲: راهنمای کاربری کد

کدهای مستند فوق در دو بخش *Part-1* و *Part-2* تهیه شده است که در نرم افزار میپل پیاده سازی شده است.

کد *Part-1* به بیان گسسته سازی معادلات دیفرانسیل که شرح آن در فصول آینده است، پرداخته و بسط‌های ریاضی صورت گرفته شده آورده شده است. گسسته سازی معادلات دیفرانسیل فوق بر اساس اصول روش هموتوپی صورت گفته است که در کد *Part-1* خط به خط شرح آن به تفضیل بیان شده و از دستور *Expand* استفاده شده است. در ابتدا معادله غیر خطی اصلی حاکم آورده شده است و سپس با وارد کردن پارامتر مجازی p (به فصل ۴ رجوع شود) معادلات بر اساس تئوری اغتشاشات هموتوپی گسسته گردیده است. پس از آن با استفاده از دستور *Collect* ضرایب جمله P جمع آوری شده‌اند. ضریب هر یک از جملات p بیانگر معادلات دیفرانسیل جدیدی هستند که دارای حل ساده‌تری نسبت به معادله دیفرانسیل غیر خطی اصلی هستند. شایان ذکر است این دسته از معادلات دارای رفتار بازگشتی *Recursive* در حل هستند. نتایج این بخش در انتهای کد *Part-1* به صورت معادلات *eq1, eq2, eq3, eq4* آورده شده‌اند که در کد بعد یعنی *Part-2* مورد استفاده قرار می‌گیرند.

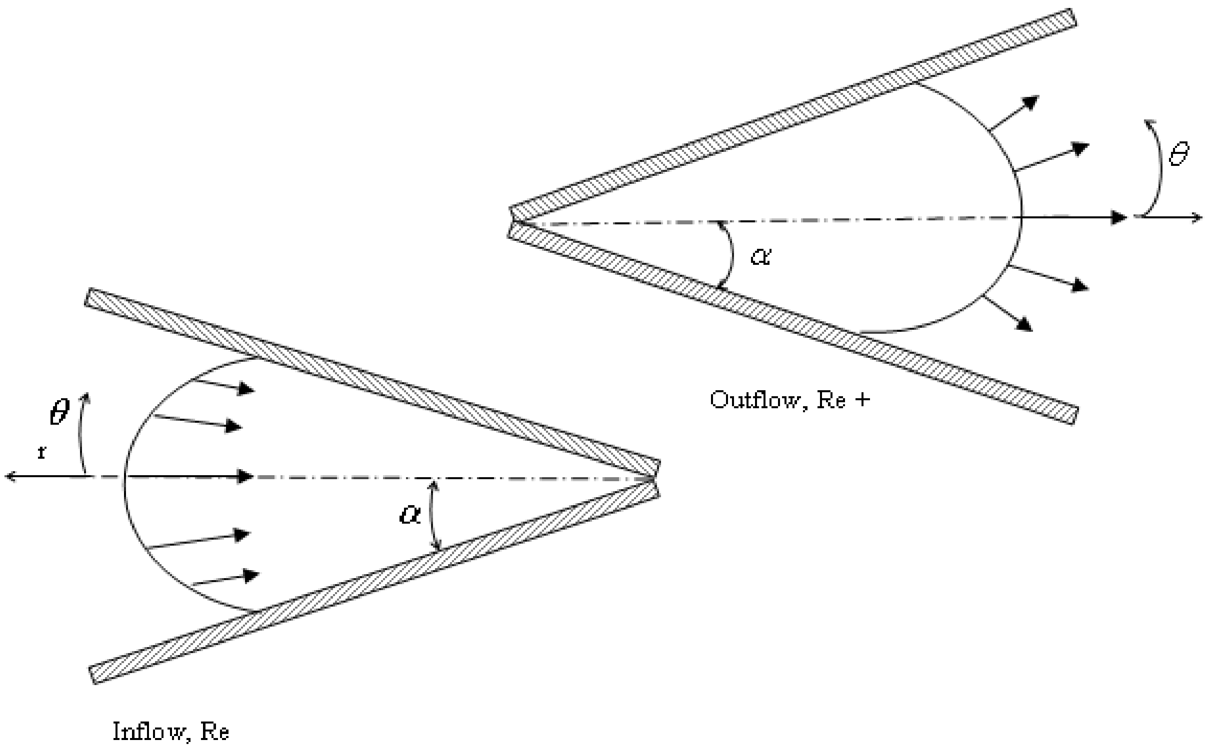
در کد*Part-2* به حل معادلات دیفرانسیل کاهش یافته پرداخته شده که از *Solver* نرم افزار میپل جهت حل این معادلات با سه شرط مرزی ابتدایی و انتهایی استفاده شده است. همچنین در کد *Part-2* روند حل به همراه توضیحات لازم جهت راهنمایی استفاده کننده از کد آورده شده است. در انتها برای بدست آوردن خروجی از یک حلقه *for* جهت ذخیره سازی پاسخ‌های بدست آمده استفاده شده است. کد *Part-2* این قابلیت را دارد که در یک فایل *Excel* اطلاعات خروجی را ذخیره نماید و پس از آن به کمک یک نرم افزار مانند *TechPlot* برای رسم آن مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست اعلام	
چگالی	ρ
تنش برشی	τ
سرعت شعاعی	v_r
ویسکوزیته	v
زاویه نیم صفحه گوه	α
زاویه از خط مرکز گوه	θ
فاصله شعاعی	r
بخش خطی معادله دیفرانسیل	L
بخش غیر خطی معادله دیفرانسیل	N
حدس اولیه روش هموتوپی	U
طول	x
طول بی‌بعد	η
عملگر مشتق	$\frac{d(\ )}{(\ )}$
عدد بی بعد رینولدز	Re
فشار	P
پارامتر هموتوپی	p
سرعت در معادله جفری-هامل	F
توابع بسط داده شده در حل هموتوپی	f

فصل ۳: فرمولاسین ریاضی مسئله جفری-هامل

جریان سیال جفری - هامل مستخرج از معادلات اصلی جریان سیالات ناویر- استوکس است. هنگامی که جریان سیال داخل سطح شیب دار قرار گیرد به صورتی که چشمه یا چاه سیال در محل تقاطع در سطح شیب دار باشد به جریان سیال جفری-هامل مشهور است.

محققین زیادی در جهت حل آن برآمده‌اند و راه حل های عددی گوناگونی برای آن ارائه داده‌اند که در مراجع [۱-۵] نمونه هایی از آن آمده است. برای آشنایی برای رفتار سیال و یا مسئله جفری- هامل شکل شماره (۱) آورده شده است.



شکل شماره (۱) شکل هندسی مسئله جفری- هامل

روش‌های تقریبی مانند آنالیز هموتوپی[۱] [۶]، روش تغییرات پله‌ای[۲] [۷] و همچنین روش آدمین[۳] [۸-۱۱] برای حل این مسئله غیر خطی به کار گرفته شده است. در این تحقیق از روش تئوری اغتشاشات هموتوپی

[1] *Homotopy*
[2] *Variational Iteration Method (VIM)*
[3] *Adomin Decomposition Method (ADM)*

برای حل این مسئله استفاده شده است. از آنجایی که مسئله فوق یک مسئله غیر خطی پیچیده در حوزه مکانیک سیالات است، این تحقیق توانسته است به کمک کدهای ارائه شده بر سختی حل آن غالب گردد و نتایج مناسبی را ارائه دهد که در مقاله ذکر شده به چاپ رسیده است.

۳-۱: بررسی مسئله جفری-هامل در یک گوه مسطح

در این تحقیق چنان که بیان شده به بررسی و حل یک جریان دو بعدی سیال درون یک گوه با دیواره‌های مسطح پرداخته است. زاویه بین هر سطح مسطح از مرکز گوه برابر علامت α در نظر گرفته شده است. (به شکل شماره (۱) رجوع شود.)

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر این مسئله یک مختصات کروی را در نظر بگیرید که مرکز آن در مرکز آن گوه قرار دارد. جریال سیال به صورت شعاعی از مرکز خارج و یا وارد می‌شود.

بدین ترتیب برای سه سرعت در مختصات کروی خواهیم داشت:

$$v_r = f(r,\theta) \tag{۱}$$

$$v_\theta = v_z = 0 \tag{۲}$$

هندسه مسئله توسط زاویه α مشخص می‌گردد و خصوصیات سیال به عنوان چگالی و وسکوزیته نیز با ν, ρ مشخص می‌گردند. همچنین برای بدست آوردن معادله حاکم، حجم نرخ جریان واحد با Q مشخص می‌گردد. براساس آنچه بیان شد، بر اساس معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(r\,v_r\right)=0,\;\; r\,v_r = f\left(\theta\right) \tag{۳}$$

در صورتی که سرعت خط مرکز در $\theta=0$ به صورت زیر باشد به بدست آوردن معادله حاکم کمک خواهد کرد.

$$v_0 = \frac{f\left(0\right)}{r} = \frac{C_0}{r} \tag{۴}$$

برای جریان خارج شونده C_0, v_0 مثبت هستند و برای جریان داخل شونده آن‌ها منفی در نظر گرفته می‌شوند. سرعت بی بعد $F\left(\theta\right)$ به صورت نسبت زیر تعریف می‌گردد:

$$v^* = \frac{v_r}{v_0} = \frac{f\left(\theta\right)}{C_0} = F\left(\theta\right) \tag{۵}$$

بنابراین

$$v_r = v_0\, F\left(\theta\right) = \frac{C_0}{r} F\left(\theta\right) \tag{۶}$$

همچنین استرس یا تنش به صورت زیر است:

$$\tau_{\theta\theta} = 2\,\mu \frac{v_r}{r} = 2\,\mu \frac{C_0 F\left(\theta\right)}{r^2} \tag{۷}$$

از طرف دیگر تنش سطحی عمودی در جهت θ ثابت است لذا:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \tag{۸}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2v\,\partial \tau_{\theta\theta}}{r^2}\dot{F} \tag{۹}$$

همچنین معادله مومنتوم در جهت شعاعی r نشان می دهد که مومنتوم با فشار P و تنش برشی در توازن است:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \tag{۱۰}$$

$$-\frac{C_0^2}{r^3}F^2=\frac{\nu C_0}{r^3}\ddot{F}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{۱۱}$$

به کمک معادله (۹) فشار در راستایr مسئله حذف می‌گردد (به کمک مشتق گیری). همچنین مجدداً به کمک مشتق گیری نسبت به θ جمله $\partial^2 p/\partial r\partial\theta$ حذف می‌گردد.

در این قسمت نیاز است که دو پارامتر معرفی گردند. اول پارامترمستقل η و همچنین پارامتر عدد رینولدز لذا:

$$\eta\equiv\frac{\theta}{\alpha} \tag{۱۲}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{v_0\, r\,\alpha}{\nu}=\frac{\alpha C_0}{\nu} \tag{۱۳}$$

عدد رینولدز بر اساس خط مرکزی محلی و αr است و عددی ثابت است.

در نهایت معادله حاکم بر مسئله سیال جفری -هامل داخل گوه با دو سطح مسطح به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\dddot{F}(\eta)+2\,\mathrm{Re}\;\alpha F(\eta)\dot{F}(\eta)+4(\alpha^2)\dot{F}(\eta)=0 \tag{۱۴}$$

در واقع معادله بیانگر معادله انتقال سرعت است و سرعت با نماد Fبیان می‌شود. برای آشنایی کامل‌تر برای بدست آوردن معادله فوق می‌توان به مرجع [۱۴] رجوع شود.

از طرف دیگر برای مسئله فوق لازم است که شرایط مرزی تعیین گردد:

$$F(0)=1,\dot{F}(0)=0,F(1)=0 \tag{۱۵}$$