به نام خدا

Market Code

بازسازی میدان سرعت به کمک روش POD و با استفاده از نرم افزارهای OpenFOAM و MatLab

نسخه: OpenFOAM: 1.6.ext, MatLab: R2010a

توسعه دهنده:	مرتضی حاجی باقری: کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک	دانشگاه علم و صنعت ایران
تهیه کننده مستند:	مرتضی حاجی باقری	
تاریخ تنظیم سند:	۹۴/۰۲/۲۹	

فهرست مطالب

چکیده

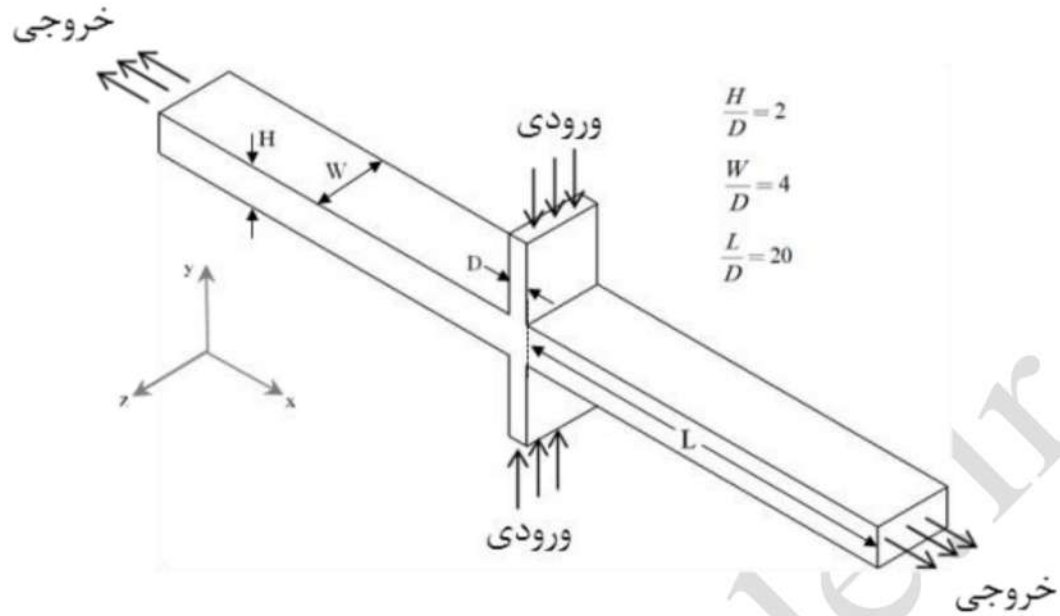
روش تفکیک متعامد مناسب (**POD**) یک ابزار تحلیلی قوی است که می‌تواند یک سیستم پیچیده و با تعداد درجات آزادی بالا را توسط تعداد اطلاعات و هزینه کمتری توصیف نماید. برای استفاده از این روش ابتدا میدان جریان توسط روش‌های تجربی و یا عددی (روش‌های **DNS**، **LES** و...) مطالعه و بانکی از اطلاعات جهت تحلیل و بررسی تولید می‌شود. در مرحله بعد **POD** بر اطلاعات بدست آمده اعمال می‌شود و باعث استخراج ساختارهای مهم و تاثیرگذار سیستم می‌گردد. در این مطالعه میدان جریان جت‌های روبروی‌هم توسط روش عددی شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ (**LES**) مدل‌سازی شده است. نتایج شبیه‌سازی در گام‌های زمانی (اسنپ‌شات‌های) مختلف ذخیره می‌شود و سپس **POD** بر روی این اسنپ‌شات‌ها اعمال می‌شود. در این مطالعه روش **POD** و محاسبه مدهای مکانی به کمک نرم‌افزار اپن‌فوم و ضرایب زمانی توسط کدی که در نرم‌افزار متلب نوشته شده است، انجام شده است

کلمات کلیدی: کاهش مرتبه، روش POD، بازسازی میدان حل

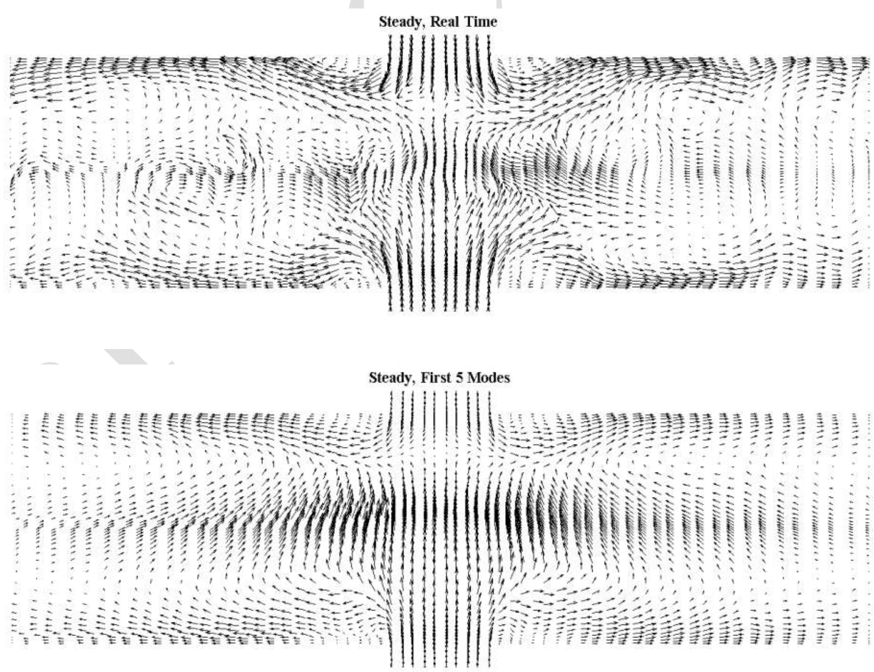
فصل ۱: راهنمای کاربری

در این مساله، میدان جریان جت‌های روبروی‌هم شبیه‌سازی شده به روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ به کمک روش تفکیک متعامد مناسب[1] (POD) بازسازی می‌شود (شکل (۱)). برای شبیه‌سازی میدان جریان حاصل از برخورد دو جت، از نرم‌افزار OpenFOAM ورژن 1.6.ext استفاده شده است. پس از انجام شبیه-سازی لازم است پایه‌های مکانی به کمک دیکشنری PODsolverDict محاسبه شوند. بدین منظور پس از انتقال این دیکشنری به پوشه system دستور PODsolver در محیط ترمینال در مسیر مساله مربوطه اجرا شود. برای بازسازی میدان حل از نرم افزار MatLab استفاده گردیده است. برای اجرای نرم افزار MatLab لازم است فایل‌های سرعت لحظه‌ای و پایه‌های مکانی (در گام زمانی دلخواه که قصد بازسازی میدان در آن زمان را داریم) به مسیر اجرای برنامه MatLab منتقل شده تا توسط کد MatLab از آنجا فراخوانی شوند. لازم به ذکر است که پایه‌های مکانی در پوشه مربوط به اولین گام زمانی ذخیره می‌شوند.

[1] Proper Orthogonal Decomposition



شکل (۱) **شماتیک هندسه مساله**



شکل (۲) **بردارهای سرعت لحظه‌ای و بازسازی شده از ۵ مد اول جریان دائم**

فصل ۲: مستندات آموزشی

۲-۱. مقدمه

در دست داشتن حجم زیادی از داده که به صورت تجربی یا شبیه‌سازی عددی بدست آمده‌اند موقعیتی معمول در بیشتر زمینه‌های علمی است. در چنین شرایطی نیاز به روش‌هایی برای پردازش این داده‌ها ضروری به نظر می‌رسد. این روش‌ها باید این قابلیت را دارا باشند که بتوانند از میان حجم زیادی از داده، اطلاعات ضروری را برای درک و مدل کردن فرآیند مورد مطالعه استخراج کنند.

مدل‌سازی کاهش مرتبه[۲] (ROM)، راهی برای نمایش ساده رفتار مدل کامل با دقت کافی است. شیوه عملکردی ROM به این صورت است که با حذف بعضی از درجه‌های آزادی[۳] (DOF) مدل کامل با اندازه n، مدلی با DOF پایین‌تر m بوجود می‌آورد به طوری که n<<m باشد. مدلی که برای کاهش مرتبه استفاده می‌شود باید از میان تمام مدل‌های موجود با DOF مشابه، مهم‌ترین اطلاعات مدل اصلی را دارا باشد. بدین ترتیب به جای بررسی مدل کامل می‌توان مدل ساده شده‌ای به وجود آورد که رفتار مورد نیاز مدل کامل را با DOF کم‌تر ارائه دهد.

در این بین، POD، روشی قدرتمند برای تحلیل داده است که هدف آن بدست آوردن تقریبی با ابعاد کم از یک بانک داده با ابعاد بزرگ است. خواص POD بیان می‌دارند که POD، پایه‌ای ترجیح داده شده برای استفاده در کاربردهای مختلف است. توابع پایه‌ای که از POD بدست می‌آیند معمولا توابع ویژه تجربی، توابع پایه تجربی، توابع متعامد تجربی، مدهای متعامد حقیقی یا بردارهای پایه نامیده می‌شوند. برجسته‌ترین ویژگی POD، بهینگی آن است که کارآمدترین راه برای به تصویر کشیدن مؤلفه‌های غالب از یک فرآیند با

[2] Reduced Order Method
[3] Degrees of Freedom

ابعاد بی‌نهایت با تنها یک تعداد محدود از "مدها" و اغلب به طور قابل توجهی تعداد کمی از مدها است **[1]**.

۲-۲. مبانی ریاضی POD

در این بخش اصول ریاضی حاکم بر روش تفکیک متعامد مناسب ارائه می‌شود. مبانی این روش بر روی اصول و ریاضیات جبر خطی و ماتریس‌ها استوار است. در ریاضیات می‌توان توابع مختلف را توسط حاصل جمع پایه‌های متفاوت بسط داد. بر این اساس بسط‌های فوریه، تیلور و... در ریاضیات شکل گرفته‌اند. در روش **POD** فرض می‌شود تابع برداری $u(\mathbf{x},t)$ در ناحیه $D=\Omega\times[0;T]$ به صورت مجموع حاصل‌ضرب مدهای مکانی در ضرائب وزنی زمانی مطابق معادله ۰ بسط داده شود **0**.

$$u(\mathbf{x},t)\simeq\sum_{k=1}^{K}a^{(k)}(t)\,\phi^{(k)}(\mathbf{x}) \qquad (۱)$$

به منظور ساده‌سازی و به خاطر اینکه قرار است از این موضوع در مکانیک سیالات استفاده شود، $\mathbf{x}$ به عنوان مختصات مکانی و t مختصات زمانی درنظر گرفته می‌شود. با توجه به معادله فوق وقتی $K\to\infty$ میل کند، مقدار این تقریب دقیق خواهد شد. یک راه کلاسیک برای حل این مسأله استفاده از توابع استاندارد از قبیل سری فوریه، چند جمله‌ای لژاندر و چند جمله‌ای چبیشف[4] به عنوان توابع پایه $\phi^{(k)}(\mathbf{x})$ می‌باشد. یک رویکرد جایگزین می‌تواند تعیین توابع $\phi^{(k)}(\mathbf{x})$ توسط تابع $u(\mathbf{x},t)$ باشد. ضرایب زمانی $a^{(k)}(t)$ میزان مشارکت مدهای مکانی $\phi^{(k)}(\mathbf{x})$ در اسنپ‌شات‌های مختلف را نشان می‌دهند. این ضرایب پس از محاسبه‌ی مدهای مکانی و با داشتن $u(\mathbf{x},t)$ محاسبه می‌شوند.

مدهای مکانی طوری انتخاب می‌شوند که نسبت به هم یکه و متعامد (ارتونرمال[5]) باشند. توابعی که معادله زیر را ارضا نمایند، ارتونرمال می‌باشند.

$$\int_{\Omega}\phi^{(k_1)}(\mathbf{x})\,\phi^{(k_2)}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\delta_{k_1k_2}, \qquad \delta_{k_1k_2}=\begin{cases}0 & for\ k_1\neq k_2\\ 1 & for\ k_1=k_2\end{cases} \qquad (۲)$$

که در آن $\delta_{k_1k_2}$، نماد دلتای کرونکر می‌باشد. در نتیجه با ضرب طرفین رابطه ۰ در $\phi^{(k)}(\mathbf{x})$، ضرائب زمانی

[4] Cheyshev
[5] Orthonormal

به صورت زیر محاسبه می‌شوند. بنابراین برای توابع پایه ارتونرمال، $a^{(k)}(t)$ فقط وابسته به $\phi^{(k)}(\mathbf{x})$ است و به مقادیر دیگر ϕ بستگی ندارد. در نتیجه بهتر است که تابع $\phi^{(k)}(\mathbf{x})$ شرایط ارتونرمال بودن را دارا باشد.

$$a^{(k)}(t) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x},t)\,\phi^{(k)}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

حال فرض کنید که $u(\mathbf{x},t)$ را برای M مکان مختلف $x_1, x_2, \ldots, x_M$ در N_t زمان متفاوت به صورت تجربی یا عددی بدست آورده‌ایم. مسأله تقریب ۰ معادل است با پیدا کردن توابع ارتونرمال $\left\{\phi^{(k)}(\mathbf{x})\right\}_{k=1}^{K}$ با $K \le N_t$ به شکلی که شرط زیر برقرار شود:

$$\min \sum_{i=1}^{N_t} \left\| u(\mathbf{x},t_i) - \sum_{k=1}^{K} \left[u(\mathbf{x},t_i), \phi^{(k)}(\mathbf{x}) \right] \phi^{(k)}(\mathbf{x}) \right\|_2^2$$

که در آن $\|\cdot\|_2$ نرم مرتبط با ضرب داخلی معمول L^2 (فضای هیلبرت)، $(.,.)$ را نشان می‌دهد. برای هر بردار $y \in \mathbb{R}^M$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{y}\|_2 = (\mathbf{y},\mathbf{y})^{1/2} = \sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_M^2}$$

روش کاربردی حل مسأله حداقل‌سازی ۰ این است که مجموعه داده‌های $\mathfrak{A} = \left\{ u(\mathbf{x},t_1), \ldots, u(\mathbf{x},t_{N_t}) \right\}$ در یک ماتریس $M \times N_t$ قرار داده شود. این ماتریس را ماتریس عکس لحظه‌ای (اسنپشات) گویند.

$$U = \begin{bmatrix} u(x_1,t_1) & u(x_1,t_2) & \cdots & u(x_1,t_{N_t}) \\ u(x_2,t_1) & u(x_2,t_2) & \cdots & u(x_2,t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_M,t_1) & u(x_M,t_2) & \cdots & u(x_M,t_{N_t}) \end{bmatrix}_{M \times N_t}$$

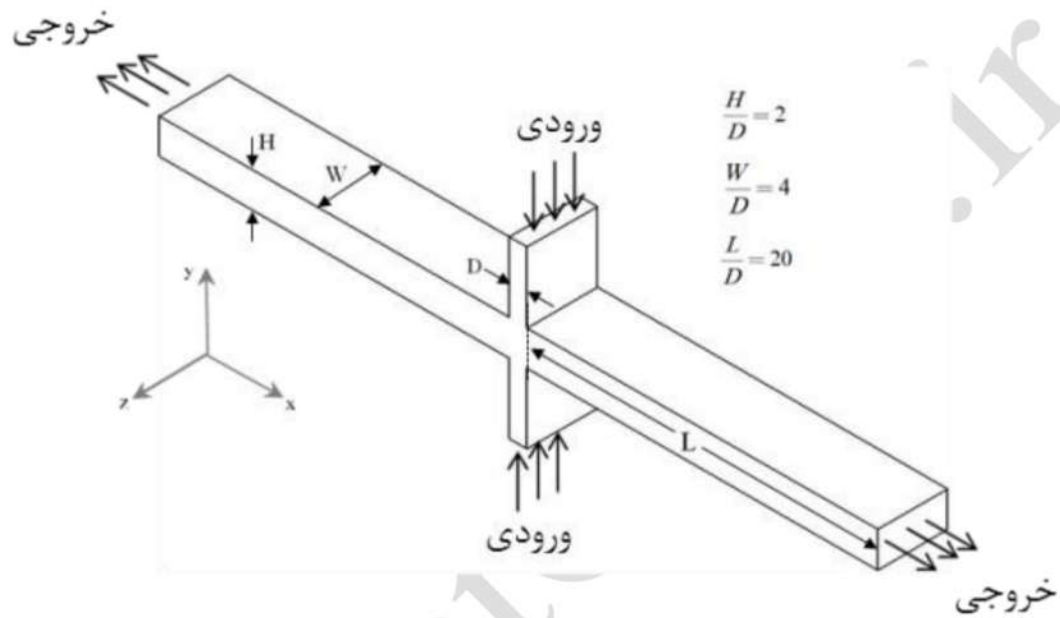
هر ستون ماتریس U یک اسنپشات $u(\mathbf{x},t)$ از مجموعه ورودی $\mathfrak{A}$ می‌باشد. اگر داده‌های اسنپشات نسبت به هم مستقل خطی فرض شوند، در این صورت مرتبه[6] ماتریس، کامل خواهد بود (یعنی هیچ دو بردار وابسته‌ای در ماتریس وجود ندارد). این حالت به طور مشخص برای روش اسنپ شات POD وجود دارد.

حل مسئله حداقل‌سازی ۰ به کمک تفکیک مقدار منفرد منقطع[7] ماتریس U با طول K بدست می‌آید.

[6] Rank
[7] Truncated Singular Value Decomposition

۲-۳. هندسه مساله

در این مساله داده‌های حاصل از شبیه‌سازی جت‌های روبروی هم بازسازی می‌شود. هندسه این مساله به صورت شکل (۳) می‌باشد.



شکل (۳) شماتیک هندسه جریان‌های برخوردی

۲-۴. محاسبه پایه‌های مکانی **(Φ)**

گام نخست در اجرای POD بر روی داده‌های حاصل از شبیه‌سازی، محاسبه پایه‌های مکانی ماتریس U می‌باشد. اگر بخواهیم از پیچیدگی‌های ریاضی مساله صرف نظر کنیم، پایه‌های مکانی مربوط به مد i-ام برای N_t اسنپ شات و مد مختلف از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\phi^i = \frac{\sum_{n=1}^{N_t} A_n^i \mathrm{u}^n}{\left\| \sum_{n=1}^{N_t} A_n^i \mathrm{u}^n \right\|}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N_t \qquad (۳)$$

که در آن A از مساله مقدار ویژه زیر محاسبه می‌گردد:

$$U^T U \mathbf{A}^i = \lambda^i \mathbf{A}^i \quad (۴)$$

و $\mathbf{u}^n$ نیز ماتریس اسنپ شات است که مقادیر (سرعت) را در اسنپ شات (لحظه) n-ام برای M مکان مختلف نشان می‌دهد:

$$\mathbf{u}^n = \begin{bmatrix} u(x_1, t_n) \\ u(x_2, t_n) \\ \vdots \\ u(x_M, t_n) \end{bmatrix} \quad (۵)$$

برای محاسبه پایه‌های مکانی می‌توان از نرم افزار MatLab استفاده کرد. اما برای شبیه‌سازی‌هایی که در OpenFOAM انجام می‌شود، می‌توان از دیکشنری PODsolverDict استفاده کرد.

```
/*-------------------*- C++ -*--------------------*\
| =========                |                                      |
| \\      /  F ield         | OpenFOAM Extend Project: Open Source CFD        |
|  \\    /   O peration     | Version:  1.6-ext                               |
|   \\  /    A nd           | Web:      www.extend-project.de                 |
|    \\/     M anipulation  |                                      |
\*-------------------------------------------------*/
FoamFile
{
   version     2.0;
   format      ascii;
   class       dictionary;
   object      PODsolverDict;
}
// * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * //

type       scalarTransport;
scalarTransportCoeffs
{

     // field     pPrime;
     // field     UPrime;
     // field     magU;
      field     Ux;
     // field     Uy;
     // field     Uz;
     // field     UPrimex;
     // field     UPrimey;
     // field     UPrimez;
```