به نام خدا

حل مسئله پوشش دهی یک سیم در سیال غیر نیوتنی هیدرودینامیکی و حل آن با تئوری اغتشاشات هموتوپی

توسعه دهنده:	ایمان شفیعی نژاد: دکترا، مهندسی فضایی
تهیه کننده مستند:	ایمان شفیعی نژاد
تاریخ تنظیم سند:	۱۳۹۴ /۰۳ / ۱

فهرست مطالب

چکیده

در این گزارش روش جدید اغتشاشي مبتني بر مباني هموتوپي رياضي بر اساس کدهای بیان شده در نرم افزار میپل معرفي ميگردد. نرم افزار میپل از نرم افزارهای کاربردی ریاضی است که کمک شایانی در ایجاد راه حل های ریاضی به ویژه پاسخهای تحلیلی ارائه می‌نماید. بر خلاف روش معمول اغتشاشات، در این روش نیازي به پارامتر اغتشاشي کوچک در حل مسئله نخواهد بود. در ابتدا جمله هموتوپي را با کمک یک پارامتر اضافه شده بر سیستم مبتني بر مفاهیم توپولوژي رياضيات تشكيل میدهیم. این پارامتر اضافه شده يادآور پارامترهاي کوچک در تئوري اغتشاشات بوده اما فاقد ماهيت فیزیکی است. لذا این روش را با عنوان اغتشاشات هموتوپي نام گذاري کرده اند. به عبارتی دیگر این روش را مي‌توان ترکيب دو روش اغتشاشات و هموتوپي در توپولوژي رياضي دانست. در ادامه برای بیان قابلیت این روش به بررسی مسئله سیال غیر نیوتني در یک حوضچه پوشش دهی پرداخته خواهد شد. از آنجايي که معادلات فوق کاملاً غیر خطی هستند لذا از این روش ریاضی کارآمد بهره برده شده است.شایان ذکر است نتایج این تحقیق در مجله آی اس آی زیر منتشر شده است.

کلمات کلیدی: هموتوپي، توپولوژي، تئوري اغتشاشات، مسائل غیر خطي، پوشش دهی سیم، حوضچه سیال غیر نیوتنی، نرم افزار میپل

Title: ***An analytic approximation of wire coating analysis for third-grade magneto-hydrodynamic flow***

Journal: ***Journal of Mechanical Engineering Science, Vol: 223, No: 10, 2009.***

فصل ۱: مقدمه

در دو دهه گذشته با پیشرفت سریع صورت گرفته در علوم غیرخطی، علاقه مهندسین و دانشمندان به روش‌های تحلیلی برای حل مسائل غیر خطی افزایش یافته است. روش اغتشاشات در این زمینه بسیار کاربردی و کارآمد بوده و مزیت‌های خود را نشان داده است. اما روش اغتشاشات بر پایه اینکه پارامتر اغتشاشی بایستی درون مسئله باشد قابل بررسی است. به عبارتی وجود پارامتر اغتشاشی، بزرگترین قید کاربردی در روش اغتشاشات است. به عبارت دیگر به عنوان بزرگترین مشکل در حل معادلات غیر خطی می‌توان به این نکته اشاره کرد که این معادلات بعضاً دارای پارامتر اغتشاشی نخواهند بود. لذا برای غلبه بر این مشکل آقایان لیائو و هی در سال ۱۹۹۷ میلادی تکنیک اغتشاشات جدیدی را بر پایه توپولوژی ریاضی پیشنهاد نمودند[۷-۱].

در این روش یک پارامتر مصنوعی در معادله هموتوپی تشکیل داده شده قرار می‌گیرد و این در حالی است که این پارامتر به عنوان یک پارامتر در محدوده صفر و یک فرض می‌گردد. البته باید بیان داشت که در مورد پارامتر مصنوعی وارده اطلاع دقیقی در روند حل بدست نمی‌آید و نیازی هم به آن نبوده و به نوعی تنها نقش یک کاتالیزور را دارد.

در این روش می توان با استفاده از تکنیک اغتشاشات هموتوپی یک مسئله غیر خطی غیر قابل حل را به تعداد محدودی از معادلات قابل حل تقسیم نمود[۱۰-۷].

فصل ۲: راهنمای کاربری کد

کدهای مستند فوق در دو بخشPart-1 و Part-2 تهیه شده است که در نرم افزار میپل پیاده سازی شده است.

کد Part-1 به بیان گسسته سازی معادلات دیفرانسیل که شرح آن در فصول آینده است، پرداخته و بسط‌های صورت گرفته شده آورده شده است. گسسته سازی معادلات دیفرانسیل فوق بر اساس اصول روش هموتوپی صورت گفته است که در کد Part-1 خط به خط شرح آن به تفضیل بیان شده و از دستور Expand استفاده شده است. در ابتدا معادله غیر خطی اصلی حاکم آورده شده است و سپس با وارد کردن پارامتر مجازی P (به فصل ۴ رجوع شود) معادلات بر اساس تئوری اغتشاشات هموتوپی گسسته گردیده است. پس از آن با استفاده از دستور Collect ضرایب جمله P جمع آوری شده‌اند. ضریب هر یک از جملات P بیانگر معادلات دیفرانسیل جدیدی هستند که دارای حل ساده‌تری نسبت به معادله دیفرانسیل غیر خطی اصلی هستند. شایان ذکر است این دسته از معادلات دارای رفتار بازگشتی Recursive در حل هستند.

در کدPart-2 به حل معادلات دیفرانسیل کاهش یافته پرداخته شده که از Solver نرم افزار میپل جهت حل این معادلات با دو شریط مرزی ابتدایی و انتهایی استفاده شده است. همچنین در کد Part-2 روند حل به همراه توضیحات لازم جهت راهنمایی استفاده کننده از کد آورده شده است. در انتها برای بدست آوردن خروجی از یک حلقه for جهت ذخیره سازی پاسخ‌های بدست آمده استفاده شده است. کد Part-2 این قابلیت را دارد که در یک فایل Excel اطلاعات خروجی را ذخیره نماید.

فهرست اعلام	
چگالی	ρ
پارامتر مغناطیس در معادلات	μ_m
شعاع سیم تحت پوشش	R_c
شعاع سیم	R_w
شعاع حوضچه سیال	R_d
فاصله شعاعی در ابتدا	R_0
فاصله شعاعی در انتها	R_c
طول	L
سرعت سیم	u_w
تانسور واحد	$\mathbf{I}$
چگالی جریان	$\mathbf{J}$
میدان مغناطیسی کل	$\mathbf{B}$
میدان مغناطیسی القایی	$\mathbf{b}$
میدان الکتریکی	$\mathbf{E}$
سرعت	$\mathbf{V}$
مقاوت الکتریکی	σ
ضرایب مواد	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$
ضریب سرعت	μ

فصل ۳: فرمولاسین ریاضی مسئله پوشش دهی سیم و سیال غیر نیوتنی

برای ورود به مسئله، یک حوضچه سیال غیر نیوتنی را مد نظر قرار دهید که سیم که قرار است در آن پوشش دهی شود و از آن بگذرد. همچنین سیم توسط یک موتور دور ثابت کشیده می‌شود که فرآیند پوشش دهی به خوبی انجام گیرد. در شکل های شماره (۱) و (۲) این موضوع جهت روشن شدن بحث آورده شده است.

۲-۱ فرض‌های فرمولاسین ریاضی:

1) *مذاب پلیمر به صورت لایه ای در نظر گرفته می شود.*
2) *سیال حامل جریان الکتریسیته است.*
3) *جریان سیال در راستای z از نظر فشار مستقل از صفحه شعاعی است.*

موارد ذکر شده در بالا منطبق بر مرجع شماره [۳] است. تانسور تنش تعریف شده جهت سیال غیر نیوتنی مرتبه ۳ بواسطه فشار p و تانسور یکه I بر اساس مرجع [۱۹] بیان می‌گردد.

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{S}_i - pI \qquad (۱)$$

که در آن ضرایب تانسور تنش به فرم زیر بیان می شوند.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mu \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{S}_2 &= \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 \\ \mathbf{S}_3 &= \beta_1 \mathbf{A}_3 + \beta_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \beta_3 (tr \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1 \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در حالت کلی تانسور $\mathbf{A}_n$ و $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$ در معادلات بالا به فرم زیر هستند.

$$\mathbf{A}_n = \frac{D\mathbf{A}_{n-1}}{Dt} + \mathbf{A}_{n-1}(\nabla \mathbf{V}) + (\mathbf{V}\nabla)^T \mathbf{A}_{n-1}, \qquad n \geq 1 \qquad (۳)$$

که در نهایت معادلات سیال بر اساس معادلات مرسوم مومنتوم در مکانیک سیالات و همچنین معادلات مکسول در الکترومغناطیس برای این سیال که مگنتو هیدرودینامیک یا *MHD* نامیده می‌شود، در زیر بیان شده است.

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right]=\nabla\cdot\mathbf{T}+\mathbf{J}\times\mathbf{B} \qquad (۴)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=0 \qquad (۵)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\ \ \nabla\times\mathbf{B}=\mu_m\mathbf{J},\ \ \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۶)$$

$$\mathbf{J}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}),\quad \mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{b} \qquad (۷)$$

در معادلات بالا $\mathbf{B}$ به فرم $\mathbf{B=B_0+b}$ مد نظر قرار می گیرد و $\mathbf{b}$ بیانگر میدان مغناطیسی است که صرف نظر می گردد و همچنین میدان $\mathbf{B}$ نیز عمود بر میدان سرعت است.

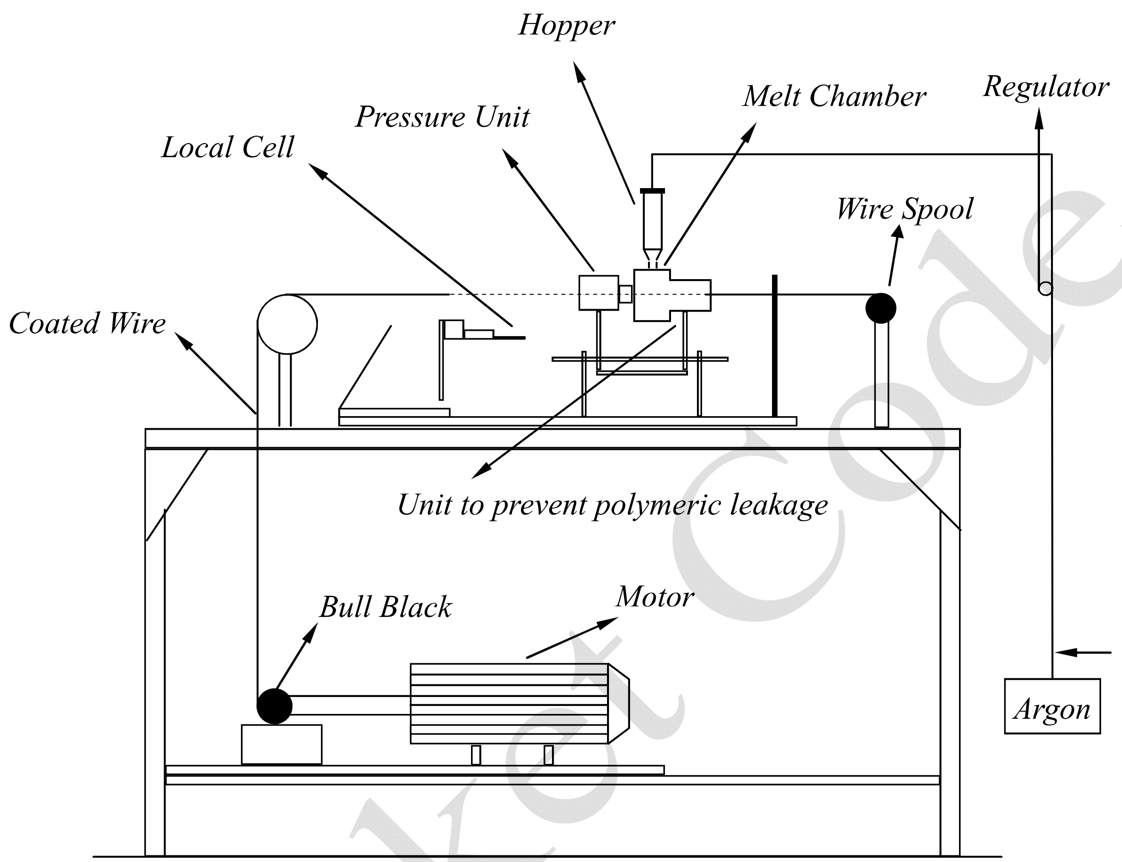
$$(\mathbf{J}\times\mathbf{B})=-\sigma\mathbf{B}_0^2\mathbf{V} \qquad (۸)$$

سرعت مدنظر در این تحقیق در راستای Z است لذا:

$$\mathbf{V}=(0,0,v(r)) \qquad (۹)$$

چنانچه در دستگاه استوانه‌ای معادلات بیان شوند به فرم زیر ایجاد خواهد شد. (به شکل شماره (۱) رجوع شود.)

فصل ۴: فرض‌ها ریاضی در راستای حل مسئله پوشش دهی سیم



شکل (۱) نمای شماتیکی از پوشش دهی به روش بیان شده

$$\mathbf{A}_1 = 2d = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_r}{\partial Z} + \frac{\partial V_Z}{\partial r} \\ + & 2(\frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}) & \frac{\partial V_\theta}{\partial Z} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_Z}{\partial \theta} \\ + & + & 2\frac{\partial V_Z}{\partial Z} \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

با در نظر گرفتن $\partial p / \partial z = 0$ که بیان کننده عدم تغییرات فشار در راستاط Z است معادله دیفرانسیل غیر خطی زیر حاصل می‌گردد.

$$\mu\frac{d^2v}{dr^2}+6(\beta_2+\beta_3)(\frac{dv}{dr})^2\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\left[\mu\frac{dv}{dr}+2(\beta_2+\beta_3)(\frac{dv}{dr})^3\right]-\sigma B_0^2v=0 \quad (۱۱)$$

همچنین شرایط مرزی به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$v=u_\infty \quad at \quad r=R_w, \qquad v=0 \quad at \quad r=R_d \quad (۱۲)$$

در حجم کنترلی در نظر گرفته شده برای جریان سیال مقدار خروج سیال به فرم زیر مدل می‌گردد.

$$Q=\pi u_\infty(R_c^2-R_w^2) \quad (۱۳)$$

به عبارت دیگر:

$$Q=\int_{R_w}^{R_d}2\pi rv(r)dr \quad (۱۴)$$

از آنجایی که در دو عبارت بالا میزان دبی یکسان است، می توان پارامتر R_cرا بدست آورد.

$$R_c=\sqrt{R_w^2+\frac{2}{u_w}\int_{R_w}^{R_d}rv(r)dr} \quad (۱۵)$$

نکته اساسی میزان کشش سیم است که بر اساس میزان تنش به فرم زیر بیان می‌شود.

$$S_{rz}\Big|_{r=R_w}=\mu(\frac{\partial v}{\partial r})+2(\beta_2+\beta_3)(\frac{\partial v}{\partial r})^3\Big|_{r=R_w} \quad (۱۶)$$

بنابراین میزان نیروی کلی به گونه زیر بیان می‌شود.

$$F_w=2\pi R_wLS_{rz}\Big|_{r=R_w} \quad (۱۷)$$